

SOLUZIONI III ALLENAMENTO REGIONALE TEMATICO – COMBINATORIA

26 Gennaio 2018

- 1) Dato un cubo C , quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre vertici di C e non giacciono su nessuna delle facce di C ?

SOLUZIONE

Tutti i possibili triangoli che hanno come vertici tre vertici di C sono $\binom{8}{3} = 56$. Su ognuna delle 6 facce giacciono 4 triangoli (equivale a scegliere quale vertice non utilizzare per il triangolo), pertanto i triangoli cercati sono $56 - 6 \cdot 4 = 32$

- 2) Quante sono le terne ordinate di interi non negativi tali che risulti $a+b+c=57$?

SOLUZIONE

Immaginiamo di avere una fila di 57 palline nere (per esempio). L'esercizio equivale a chiedere tutti i possibili modi di dividere queste palline in tre gruppi ordinati (cioè (5,2,50) è diverso da (50,5,2)) anche vuoti. È possibile far ciò inserendo degli "elementi divisori", ad esempio delle palline bianche. Per dare un'idea: $57 = \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\dots\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet = 3+50+4$ (una possibile terna). Bisogna, su $57+2 = 59$ posizioni, sceglierne due dove posizionare le palline bianche. Quindi il numero richiesto è uguale alle combinazioni di 59 elementi a 2 a 2: $\binom{59}{2} = \frac{59 \cdot 58}{2} = 1711$.

- 3) Uno strano gioco sta andando di moda in città. In un sacchetto ci sono tre palline di colore diverso. Chi scommette di riuscire ad estrarre in 9 prove successive solo palline di esattamente due diversi colori (l'estrazione di palline tutte dello stesso colore non fa quindi vincere la scommessa) rimettendo ogni volta nel sacchetto la pallina estratta vincerà il quintuplo della scommessa. L'ispettore Gianni, informato del gioco fa subito arrestare i criminali. Determinare la probabilità di vittoria del gioco. Ridurre la frazione ai minimi termini e sommare numeratore e denominatore.

SOLUZIONE

Fissati due dei tre colori, in ogni estrazione sarà possibile avere una probabilità pari a $2/3$ di estrarre una pallina di uno dei due colori. Quindi $(2/3)^9$ sarà la probabilità che l'evento si verifichi per 9 volte di seguito. Qui però sono anche contati i casi in cui la pallina estratta è sempre dello stesso colore, per cui si dovrà sottrarre $2(1/3)^9$. Questa differenza va moltiplicata per il numero di modi di fissare due colori a partire da un insieme di tre, ovvero $\binom{3}{2} = 3$, e pertanto sarà pari a: $3[(2/3)^9 - 2(1/3)^9] = (2^9 - 2)/3^8 = 510/6561 = 170/2187$, la soluzione sarà quindi $170 + 2187 = 2357$.

- 4) I tre piatti di Paolo, Andrea e Giovanni contengono ciascuno un pesce. Matteo, bendato, per cinque volte consecutive toglie un pesce da un piatto e lo sposta in un altro. Quale è

la probabilità che alla fine degli spostamenti i tre piatti contengano tutti solo un pesce?
Date come risultato le prime 4 cifre decimali della probabilità richiesta.

SOLUZIONE

Per risolvere il problema è sufficiente osservare che le possibili configurazioni di pesci sui piatti, senza tenere conto dell'ordine, sono solamente 3: (1;1;1), (2;1;0) e (3;0;0).
Calcoliamo le probabilità di transizione da una configurazione ad un'altra:

- sia da (1;1;1) che da (3;0;0) si passa sempre alla configurazione (2;1;0), quindi con probabilità 1;
- da (2;1;0) si può passare a (1;1;1) con probabilità $1/3$ (posso effettuare lo spostamento di uno dei due pesci dal piatto con due pesci sopra al piatto vuoto su un totale di 6 spostamenti possibili: $2/6=1/3$);
- da (2;1;0) si può passare a (3;0;0) con probabilità $1/6$;
- da (2;1;0) si può restare nella medesima configurazione con probabilità $1/2$.

I possibili cammini che in cinque mosse possono portare da (1;1;1) a (1;1;1) sono:

- (1;1;1)→(2;1;0)→(1;1;1)→(2;1;0)→(2;1;0)→(1;1;1)
- (1;1;1)→(2;1;0)→(2;1;0)→(1;1;1)→(2;1;0)→(1;1;1)
- (1;1;1)→(2;1;0)→(2;1;0)→(2;1;0)→(2;1;0)→(1;1;1)
- (1;1;1)→(2;1;0)→(2;1;0)→(3;0;0)→(2;1;0)→(1;1;1)
- (1;1;1)→(2;1;0)→(3;0;0)→(2;1;0)→(2;1;0)→(1;1;1)

Calcolando le probabilità dei singoli percorsi e sommando si ottiene $5/24=0,2083333$.

5. Quanti sono gli anagrammi della parola SOLUZIONI che non hanno le due O vicine?
Restituisci le prime 4 cifre del numero ottenuto.

Soluzione: 7056

Svolgimento: cominciamo col calcolare gli anagrammi che hanno le due O vicine che si possono ottenere sostituendo le due O con un'unica lettera quindi calcolando gli anagrammi della parola SOLUZINI cioè $\frac{8!}{2!} = 20160$.

Considerato che gli anagrammi della parola SOLUZIONI sono $\frac{9!}{2!2!} = 90720$, la soluzione sarà la differenza tra i due numeri trovati cioè $90720-20160=70560$

6. Nel periodo dei saldi un supermercato ha scontato 3 tipi di articoli A,B,C. Voglio acquistare 11 articoli prendendo almeno un articolo per tipo.
In quanti modi posso fare i miei acquisti?

Soluzione: 45

Svolgimento: volendo acquistare almeno un articolo per tipo posso togliere dal totale degli acquisti tre articoli e provare a suddividere i restanti 8.

In pratica il problema equivale a sistemare 8 oggetti in 3 cassette e può essere visualizzato prendendo 8 oggetti **0** e due separatori **I** cioè nel seguente modo:

00 I 000 I 000 vuol dire acquistare 2 oggetti del primo tipo, 3 oggetti del secondo e 3 del terzo

I 00000 I 000 vuol dire acquistare nessun oggetto del primo tipo, 5 oggetti del secondo e 3 del terzo

Quindi devo calcolare le permutazioni di 10 oggetti di cui 8 uguali e 2 uguali cioè $\frac{10!}{8!2!} = 45$

7. Oggi Andrea, Beatrice, Carlo e Donatella hanno scoperto di essere nati tutti nel mese di Aprile. Qual è la probabilità che almeno due di loro festeggino il compleanno lo stesso giorno? Restituisci il numero che si ottiene sommando numeratore e denominatore della frazione ottenuta dopo averla ridotta ai minimi termini.

Soluzione: 297

Svolgimento: calcoliamo la probabilità che non siano nati negli stessi giorni di aprile:

$P = 1 \cdot \frac{29}{30} \cdot \frac{28}{30} \cdot \frac{27}{30} = \frac{203}{250}$ (il primo può essere nato in un giorno qualunque di aprile, il secondo non può essere nato nel giorno in cui è nato il primo, il terzo non può essere nato nei due giorni in cui sono nati i primi due e il quarto non può essere nato nei tre giorni in cui sono nati i primi tre).

La probabilità cercata si otterrà calcolando $1-P = \frac{47}{250}$ cioè calcolando la probabilità dell'evento complementare. Sommando numeratore e denominatore si ottiene la soluzione 297.

8. In un triangolo equilatero di lato 10 si scelga a caso un punto O nel suo interno. Da O si conducano i tre segmenti perpendicolari ai lati. Qual è la probabilità che questi tre segmenti possano formare i lati di un triangolo? Restituisci il numero che si ottiene moltiplicando per 1000 la probabilità ottenuta.

Soluzione: 250

Svolgimento: come si può osservare dalla figura, chiamati x, y, z i tre segmenti perpendicolari ai lati e chiamando l il lato del triangolo equilatero si può scrivere

$$Area = \frac{xl}{2} + \frac{yl}{2} + \frac{zl}{2} = \frac{(x + y + z)l}{2}$$

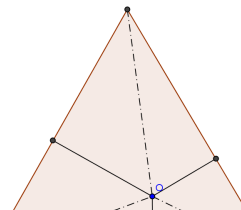
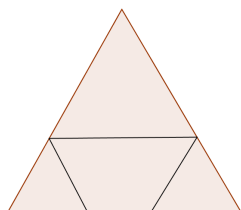
Considerando che l'area si può anche trovare come $Area = \frac{lh}{2}$, dall'uguaglianza tra le due

espressioni si ottiene $x+y+z=h$ cioè la somma dei tre segmenti è uguale all'altezza del triangolo equilatero. Affinché x, y, z siano i tre lati di un triangolo equilatero, ognuno di essi dovrà quindi essere minore di $\frac{h}{2}$. Questo implica che i punti O dovranno appartenere al

triangolo equilatero che ha per vertici i punti medi del triangolo dato.

Facendo il rapporto tra l'area dei due triangoli si ottiene $\frac{1}{4}=0,25$ (infatti sono due triangoli simili

di rapporto $\frac{1}{2}$ e le loro aree avranno rapporto $\frac{1}{4}$).



Il numero richiesto sarà quindi 250.

9. Si hanno due urne U_1 ed U_2 . U_1 contiene in tutto più di 85 palline che sono alcune bianche altre nere. U_2 contiene invece 11 palline bianche, 6 palline nere e 2 palline rosse. Il gioco consiste nel fare due estrazioni successive. Nella prima estrazione si prende a caso una pallina dall'urna U_1 . Se esce una pallina bianca la si rimette in U_1 e si procede estraendo a caso una pallina sempre da U_1 . Se nella prima estrazione invece non esce la pallina bianca, si inserisce la prima pallina estratta dentro l'urna U_2 e si procede estraendo a caso una pallina da U_2 . Il giocatore vince se la pallina estratta nella seconda estrazione è bianca. Qual è il minimo numero di palline bianche che devo inserire nell'urna U_1 affinché la probabilità di vittoria sia superiore al 75%?

[RISPOSTA 0069]

Svolgimento: Siano b ed n rispettivamente il numero di palline bianche e nere in U_1 . $b+n > 85$.

La probabilità che alla seconda estrazione venga estratta la pallina bianca è $\left(\frac{b}{b+n}\right)^2 + \frac{n}{b+n} \cdot \frac{11}{20}$. Affinché

questa probabilità sia superiore del 75% impongo che sia $\left(\frac{b}{b+n}\right)^2 + \frac{n}{b+n} \cdot \frac{11}{20} > \frac{75}{100}$ (*).

Da qui, sviluppando i calcoli, ottengo $5b^2 - 19bn - 4n^2 > 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione associata, rispetto all'incognita b , sono $b = 4n$, $b = -n/5$, essendo $n > 0$, certo $-n/5 < 4n$ quindi la disequazione è soddisfatta per $b < -n/5$ oppure per $b > 4n$. Ma $b > 0$ ed $n > 0$ pertanto deve necessariamente essere $b > 4n$. Dal momento che devo trovare il più piccolo valore di b che soddisfa (*) questo sarà del tipo $b = 4n+1$.

Con questa ipotesi si ha che l'urna U_1 contiene $b+n = 5n+1$ palline. Dal momento poi che $b+n > 85$, deve essere $b+n \geq 86$. A questo punto il problema si traduce nel trovare il più piccolo valore di n per il quale $5n+1 \geq 86$ che è $n = 17$. Il valore di b cercato è dunque $b = 4 \cdot 17 + 1 = 69$.

10. Iniziando da 1 scriviamo i numeri interi uno dopo l'altro. Qual è il numero in cui compare la cifra 9 per la 2018-esima volta?

[RISPOSTA 6934]

Svolgimento:

Considero i numeri che hanno al massimo tre cifre, cioè quelli ≤ 999 .

Quelli che hanno una sola cifra uguale a 9, dal momento che possono averla o come cifra delle unità o delle decine o delle centinaia, sono $8 \times 3 = 24$ (ognuna delle cifre diverse da 9 può essere scelta in $\{0, 1, 2, \dots, 8\}$).

Quelli che hanno esattamente due cifre uguali a 9 possono avere la cifra diversa da 9 o come cifra delle unità, o come cifra delle decine o come cifra delle centinaia e, dal momento che questa può essere scelta in $\{0, 1, 2, \dots, 8\}$, sono $9 \times 3 = 27$.

E' unico il numero con tre cifre uguali a 9.

Pertanto fino al numero 999, o equivalentemente fino al numero 1000, possiamo contare la cifra 9 per

$243 \times 1 + 27 \times 2 + 1 \times 3 = 300$ volte. $2018 : 300 = 6$ con il resto di 218, pertanto fino al 6000 la cifra 9 compare $300 \times 6 = 1800$ volte. Ne mancano ancora $2018 - 1800 = 218$.

Considero ora i numeri da 6000 a 6099. Quelli che contengono una sola cifra 9, dal momento che può essere o quella delle decine o quella delle unità, sono $9 \times 2 = 18$. 6099 è l'unico numero con due cifre 9. Pertanto da 6000 a 6099 contiamo la cifra 9 per $18 \times 1 + 1 \times 2 = 20$ volte.

Dal 6000 al 6899 contiamo la cifra 9 per $20 \times 9 = 180$ volte. Quindi da 1 a 6899 contiamo la cifra 9 per $1800 + 180 = 1980$ volte. Ne mancano $2018 - 1980 = 38$.

Adesso bisogna stare attenti perché nei numeri da 6900 (almeno fino a 6999) la cifra 9 compare sempre almeno una volta (mi riferisco alla cifra delle centinaia).

Da 6900 a 6908 contiamo la cifra 9 per 9 volte; nel 6909 contiamo la cifra 9 per 2 volte.

Da 6910 a 6918 contiamo la cifra 9 per 9 volte; nel 6919 contiamo la cifra 9 per 2 volte.

Da 6920 a 6928 contiamo la cifra 9 per 9 volte; nel 6929 contiamo la cifra 9 per 2 volte.

Riassumendo, da 1 a 6929 contiamo la cifra 9 per $1980 + (9+2) \times 3 = 2013$ volte. Per arrivare a 2018 volte ne mancano 5 quindi il numero che risolve il problema è 6934.

11. Sia M la media aritmetica dei numeri che in base 8 si scrivono utilizzando una ed una sola volta le cifre del numero 1357. Qual è il valore di M in base 10?

[RISPOSTA 2340]

Svolgimento:

I numeri di questa forma sono $4!$. Consideriamo ad esempio la cifra 1.

Ci sono $3!$ numeri nei quali 1 è la prima cifra da destra e cioè, ragionando in base 10, 1×8^0 compare $3!$ volte.

Ci sono $3!$ numeri nei quali 1 è la seconda cifra da destra e cioè, ragionando in base 10, 1×8^1 compare $3!$ volte.

Ci sono $3!$ numeri nei quali 1 è la terza cifra da destra e cioè, ragionando in base 10, 1×8^2 compare $3!$ volte.

Ci sono $3!$ numeri nei quali 1 è la quarta cifra da destra e cioè, ragionando in base 10, 1×8^3 compare $3!$ volte.

Quanto osservato per il numero 1 vale anche per 3, 5 e 7 e pertanto compare $3!$ volte ognuno dei termini

$3 \times 8^0, 3 \times 8^1, 3 \times 8^2, 3 \times 8^3, 5 \times 8^0, 5 \times 8^1, 5 \times 8^2, 5 \times 8^3, 7 \times 8^0, 7 \times 8^1, 7 \times 8^2, 7 \times 8^3$. Quando andiamo a considerare in base 10 la somma dei numeri che in base 8 si scrivono utilizzando una ed una sola volta le cifre del numero 1357, tale somma, che per la definizione di media aritmetica è $M \times 4!$, dal momento che non ci sono altri termini da considerare, risulta:

$$M \times 4! = 3! \times [8^0 \times (1+3+5+7) + 8^1 \times (1+3+5+7) + 8^2 \times (1+3+5+7) + 8^3 \times (1+3+5+7)] = 3! \times (1+3+5+7) \times (8^0 + 8^1 + 8^2 + 8^3) = 3! \times 16 \times \frac{8^4 - 1}{8 - 1} = 3! \times 16 \times \frac{(8^2 - 1) \times (8^2 - 1)}{7} = 3! \times 16 \times \frac{63 \times 65}{7} = 3! \times 16 \times 9 \times 65$$

$$\Rightarrow M = \frac{3! \times 16 \times 9 \times 65}{4!} = 2340.$$

12. Luca ha ricevuto un gioco per il suo compleanno. Nella confezione c'è una tavoletta di legno divisa in quattro regioni, indicate con le lettere A, B, C e D, dei chiodini, un piccolo martello e 100 elastici. Bisogna piantare i chiodini sulla tavoletta quindi collegare con un elastico due e solo due chiodini. Se due chiodini sono collegati con un elastico non possono più essere collegati fra loro con un altro elastico. Quando Luca smette di giocare osserviamo che per ogni chiodino di A passano esattamente 5 elastici, per ogni chiodino di B e di C esattamente 4 elastici e per ogni chiodino di D ne passano esattamente 2. Sapendo che in A e in B c'è lo stesso numero di chiodini, che in C ce ne sono 2 più che in A e che in D c'è un chiodino più dei $\frac{3}{4}$ di

quelli di A e che sono stati usati tutti gli elastici, tranne 8, determina quanti chiodi sono stati piantati in tutto da Luca.

[RISPOSTA 0048]

Svolgimento:

“in D c’è un chiodino più dei $\frac{3}{4}$ di quelli di A” quindi, indicando con a, b, c, d rispettivamente i chiodini di A, B, C e D, si ha $a=4x$, $d=1+3x$ e, per le altre informazioni del testo, $b=4x$ e $c=4x+2$.

Considerando il numero di elastici che passano per ogni chiodino delle varie regioni, che ogni elastico collega due e solo due chiodini e che ne sono stati usati 92 in tutto si ha $5 \cdot a + 4 \cdot b + 4 \cdot c + 2 \cdot d = 2 \cdot 92$. Risolvendo ora $5 \cdot 4x + 4 \cdot 4x + 4 \cdot (4x + 2) + 2 \cdot (1 + 3x) = 184$, si ricava $x=3$. Il numero dei chiodini usati da Luca è dunque $a+b+c+d=15x+3=48$.

13. Quanti zeri servono per scrivere tutti i numeri interi da 0 fino a 2018 (inclusi gli estremi)?

Soluzione: [0521] contiamo gli zeri da 0 a 999, scriviamo i numeri con meno di 3 cifre con degli zeri davanti fino a diventare numeri a 3 cifre (5 per esempio si scriverà 005); contiamo quindi gli zeri da 000 a 999, ci sono 1000 numeri con 3 cifre ciascuno per un totale di 3000 cifre equamente distribuite tra i 10 numeri da 0 a 9, quindi ci saranno $3000:10=300$ zeri. A questi vanno tolti i 2 zeri davanti i 10 numeri 0,1,...,9 e lo zero davanti i 90 numeri 10,11,...,99. Quindi rimangono $300-2 \times 10 - 1 \times 90 = 190$ zeri.

Da 1000 a 1999 abbiamo altri 300 zeri (stavolta non devo togliere nulla) e da 2000 a 2018 abbiamo altri 31 zeri per un totale complessivo di $190+300+31=521$ zeri.

14. Quanti numeri interi positivi minori di 2018 sono sia palindromi che multipli di 11? (Un numero si dice palindromo se rimane identico letto da destra a sinistra o da sinistra a destra, ad esempio 12321.)

Soluzione: [0028] per il criterio di divisibilità per 11, tutti i numeri palindromi di 2 e 4 cifre sono banalmente multipli di 11, quindi nel nostro caso lo sono i 9 numeri 11,22,...,99 e i 10 numeri 1×1 con $x=0,1,...,9$ e lo è anche il 2002 per un totale di $9+10+1=20$ numeri. A questi vanno aggiunti quelli con tre cifre, contiamoli:

(1) xyx con $x=1,2,...,9$ e $y=2x$, essi sono: 121, 242, 363 e 484; oppure

(2) xyx con $x=1,2,...,9$ e $y=2x-11$, essi sono: 616, 737, 858 e 979.

Non ce ne sono altri, quindi la risposta è $20+4+4=28$.

15. Un numero intero positivo di quattro cifre si dice *quasinteressante* se la cifra delle migliaia è la somma delle rimanenti 3 cifre. Quanti numeri *quasinteressanti* (di quattro cifre) esistono?

Soluzione: [0219] ragioniamo per casi sulla cifra delle migliaia di $axyz$:

$a=1$: dobbiamo distribuire 1 unità su 3 posti, usiamo le combinazioni con ripetizione ($C'_{n,k} = C_{n+k-1,k-1}$): $C'_{1,3} = C_{3,2} = 3$;

$a=2$: analogamente a prima con 2 unità da distribuire: $C'_{2,3} = C_{4,2} = 6$;

$a=3,...,9$: dobbiamo trovare $C'_{3,3} = C_{5,2} = 10, \dots, C'_{9,3} = C_{11,2} = 55$.

Sommando questi numeri si ha $3+6+10+15+21+28+36+45+55=219$.

N.B. per far più velocemente questo conto possiamo sfruttare la proprietà dei coefficienti binomiali (che si intuisce facilmente guardando le diagonali del triangolo di Tartaglia) che dice che:

$\sum_{i=k}^n C_{i,k} = C_{n+1,k+1}$; nel nostro caso si ha:

$$C_{3,2} + C_{4,2} + \dots + C_{11,2} = \sum_{i=2}^{11} C_{i,2} - C_{2,2} = 220 - 1 = 219.$$

16. Sia data una scacchiera 4x4; in quanti modi possiamo metterci tre *Re* di tre colori diversi in maniera tale che due qualsiasi di essi non possono stare in caselle che abbiano in comune almeno un vertice (come nel normale gioco degli scacchi)? (Due diverse configurazioni che dopo un'opportuna rotazione risultano coincidenti sono comunque da considerare distinte.)

Soluzione: [0840] siano i tre *Re* di colore Blu, Rosso e Giallo (abbreviati B, R e G). Ragioniamo per casi sulla posizione di B:

- (3) B occupa una casella d'angolo: evidenziamo le caselle dove non possono stare R e G e in ciascuna delle rimanenti caselle scriviamo il numero di caselle che può occupare G se R occupa quella casella lì dove è scritto il numero, avremo

B		8	8
		5	6
8	5	4	6
8	6	6	8

Sommando tutti i numeri abbiamo 78 possibilità da moltiplicare per 4 perché sono 4 le caselle d'angolo in cui può stare B. Quindi $78 \times 4 = 312$.

- (4) B occupa una casella laterale che non sia d'angolo: ragioniamo in maniera analoga:

		6	6
B		4	4
		3	4
8	6	5	6

Sommando tutti i numeri abbiamo 52 possibilità da moltiplicare per 8 perché sono 8 le caselle laterali non d'angolo in cui può stare B. Quindi $52 \times 8 = 416$.

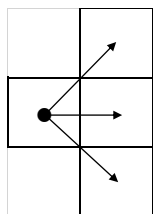
- (5) B occupa una casella centrale: ragioniamo sempre in maniera analoga:

			5
	B		4
			3
5	4	3	4

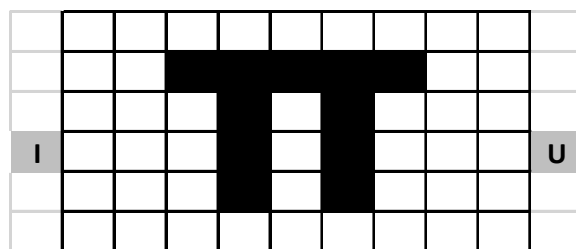
Sommando tutti i numeri abbiamo 28 possibilità da moltiplicare per 4 perché sono 4 le caselle centrali in cui può stare B. Quindi $28 \times 4 = 112$.

In totale $312 + 416 + 112 = 840$ possibili combinazioni dei tre *Re* sulla scacchiera.

17. È data la seguente griglia 9x6. Si vogliono realizzare dei percorsi che partano dalla casella contrassegnata con I e terminino nella casella U.

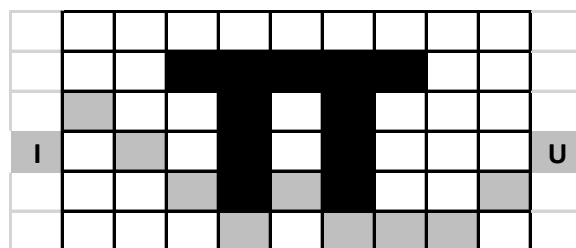


Ad ogni passo ci si deve spostare nella colonna più a destra restando nella stessa riga o spostandosi in quella più in alto o in quella più in basso (come rappresentato a lato). Non è possibile uscire dalla griglia né occupare le caselle nere.



Quanti percorsi diversi esistono? (Nella successiva figura è rappresentato uno dei percorsi

possibili).



SOLUZIONE

Notiamo che il numero di percorsi diversi che portano ad una particolare casella C è dato dalla somma tra il numero di percorsi diversi che portano a ciascuna delle caselle dalle quali si può raggiungere C. Si può pertanto scrivere in ogni casella, a partire da quelle della colonna più a sinistra, il numero di diversi percorsi che portano a quella casella. Si ottiene:

	0	0	1	1	1	1	1		
	0	1						1	
	1							0	19
I	1	3						18	54
	1	2	6		9		18	36	90
	0	1	3	9	9	18	18	36	

La soluzione è dunque 0163.

18. Vengono lanciati 4 dadi e, con i valori ottenuti, si forma un numero di 4 cifre. Qual è la probabilità che, scegliendo in maniera opportuna l'ordine delle cifre, si possa formare un numero divisibile per 55?

SOLUZIONE

Affinché un numero sia divisibile per 55, esso deve essere divisibile sia per 5 che per 11.

È dunque necessario che tra i quattro numeri usciti ci sia almeno un 5 (da mettere come cifra delle unità). Inoltre, affinché si possa formare un numero divisibile per 11, gli altri tre risultati, opportunamente ordinati, dovranno formare il numero $abc5$ con $5+b=a+c$.

Elenchiamo tutte le possibili scelte delle quattro cifre che verificano le precedenti condizioni (a meno dell'ordine). Per agevolare il conteggio, dividiamo per casi a seconda del valore di b (5436 sta a indicare, ad esempio, $b=4$, $a=3$, $c=6$).

$b=1$ ($a+c=6$): 5115 5124 5133

$b=2$ ($a+c=7$): 5216 5225 5234

$b=3$ ($a+c=8$): 5326 5335 5344

$b=4$ ($a+c=9$): 5436 5445

$b=5$ ($a+c=10$): 5546 5555

$b=6$ ($a+c=11$): 5656

A questo punto contiamo in quanti modi diversi si possono ottenere ciascuna di queste combinazioni di risultati. Nel caso di 5555, c'è 1 solo modo possibile. Nei casi 5115, 5225, 5335, 5445 e 5656 le

possibilità sono $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$. Nei casi 5133, 5344, 5546 le possibilità sono $\frac{4!}{2!} = 12$. Nei restanti casi 5124, 5216, 5234, 5326, 5436 le possibilità sono $4! = 24$.

In totale si hanno $1+5 \cdot 6+3 \cdot 12+5 \cdot 24=187$. Le possibilità totali sono $6^4=1296$. Essendo 187 divisibile

per 7 e per 11, la frazione $\frac{187}{1296}$ che esprime la probabilità cercata è ridotta ai minimi termini. La soluzione è quindi $187+1296=1483$.

19. Una scatola contiene 10 cioccolatini: 6 al latte e 4 fondenti. Vengono mescolati e distribuiti casualmente tra 5 persone: alla prima ne vengono dati 3, alla seconda soltanto 1 ed agli altri 2 ciascuno. Qual è la probabilità che almeno una persona abbia più di un cioccolatino fondente?

SOLUZIONE

Chiamiamo A, B, C, D, E le cinque persone (A riceve 3 cioccolatini, B-C-D ne ricevono 2, E soltanto 1). Immaginiamo di dover distribuire i cioccolatini nelle seguenti posizioni A1 A2 A3 B1 B2 C1 C2 D1 D2 E.

È più pratico contare le distribuzioni che non verificano la proprietà richiesta, cioè quelle in cui quattro persone hanno un cioccolatino fondente ed una non ne ha nessuna.

Indichiamo con L il cioccolatino al latte e con F quello fondente. Contiamo distinguendo, come casi, quale tra le 5 persone resta senza cioccolatini fondenti.

Caso 1. A non ha cioccolatini fondenti.

A: L L L B: F L o L F C: F L o L F D: F L o L F E: F Totale: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$
possibilità

Caso 2. B non ha cioccolatini fondenti.

A: F L L o L F L o L L F B: L L C: F L o L F D: F L o L F E: F Totale: $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$
possibilità

Casi 3. e 4. (C o D non hanno cioccolatini fondenti)

Simmetrici al caso 2. In totale 12+12 possibilità

Caso 5. E non ha cioccolatini fondenti.

A: F L L o L F L o L L F B: F L o L F C: F L o L F D: F L o L F E: L Totale: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
possibilità

Dunque in totale, per calcolare la probabilità contraria, abbiamo $8+12+12+12+24=68$ possibilità.

I casi possibili sono tanti quanti i possibili modi di disporre i 4 cioccolatini fondenti in 10 posti diversi:

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210. \text{ La probabilità cercata è: } \frac{210-68}{210} = \frac{142}{210} = \frac{71}{105}. 71+105=0176.$$

20. Un'urna contiene 1 pallina bianca ed 1 nera. Si lancia per 3 volte una moneta avente 0 su una faccia e 1 sull'altra e si inserisce nell'urna, in aggiunta alle due palline presenti, un numero di palline nere pari alla somma dei risultati ottenuti dai 3 lanci della moneta. Si estrae quindi una pallina dall'urna. Sapendo che la pallina estratta è bianca, qual è la probabilità che i tre lanci della moneta abbiano dato sempre 0 come risultato?

SOLUZIONE

Osserviamo, innanzitutto, che lanciando 3 volte una moneta avente 0 su un lato e 1 sull'altro si possono ottenere i seguenti $8(=2^3)$ risultati raggruppati secondo la loro somma S:

S=0: 0 0 0 S=1: 1 0 0 - 0 1 0 - 0 0 1 S=2: 1 1 0 - 1 0 1 - 0 1 1 S=3: 1 1 1

Indicata con $p(S=n)$ la probabilità di ottenere la somma n, abbiamo: $p(S=0)=\frac{1}{8}$, $p(S=1)=\frac{3}{8}$, $p(S=2)=\frac{3}{8}$,

$$p(S=3)=\frac{1}{8}.$$

Sia ora $p(B|S=n)$ la probabilità di estrarre una pallina bianca dall'urna se la somma dei risultati delle monete è stata n. Considerando le n palline nere inserite nell'urna nei vari casi, si ha:

$$p(B|S=0)=\frac{1}{2} \quad p(B|S=1)=\frac{1}{3} \quad p(B|S=2)=\frac{1}{4} \quad p(B|S=3)=\frac{1}{5}$$

La probabilità di estrarre una pallina bianca è complessivamente:

$$p(B) = p(S=0) \cdot p(B|S=0) + p(S=1) \cdot p(B|S=1) + p(S=2) \cdot p(B|S=2) + p(S=3) \cdot p(B|S=3) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{49}{20} = \frac{49}{160}$$

La probabilità richiesta, che possiamo indicare con $p(S=0|B)$ si può calcolare con la formula di Bayes:

$$p(S = 0|B) = \frac{p(B|S = 0) \cdot p(S = 0)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{49}{160}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{160}{49} = \frac{10}{49}$$

La soluzione è $10+49= 0059$.