

Preparazione Olimpiadi della Matematica

Marco Vita

Liceo Scientifico "G. Galilei" Ancona

18 novembre 2015

Quesito 1

Quante cifre ha il numero 20^{10} ?

Quesito 1

Quante cifre ha il numero 20^{10} ?

Soluzione

$$20^{10} = (2 \cdot 10)^{10} = 2^{10} \cdot 10^{10} = 1024 \cdot 10^{10}.$$

Questo numero si scrive come 1024 seguito da 10 zeri, quindi ha $4 + 10 = 14$ cifre.

Quesito 2

Sia n la somma dei 25 numeri primi più piccoli. Qual è la cifra delle unità di n ?

(**A**) 1, (**B**) 3, (**C**) 7, (**A**) 9, (**E**) 0.

Quesito 2

Sia n la somma dei 25 numeri primi più piccoli. Qual è la cifra delle unità di n ?

(A) 1, (B) 3, (C) 7, (A) 9, (E) 0.

Soluzione

n contiene l'addendo 2 (il più piccolo numero primo) e 24 addendi dispari.

La somma di un numero pari di numeri dispari è pari.

Ne viene che n è pari, quindi l'unica risposta possibile è (E).

Quesito 3

Per quanti numeri naturali n , sia n che $(n - 6)^2 + 1$ sono primi?

Quesito 3

Per quanti numeri naturali n , sia n che $(n - 6)^2 + 1$ sono primi?

Soluzione

n deve essere primo $\implies n = 2 \vee n$ è dispari.

Caso $n = 2$ $(n - 6)^2 + 1 = 17$, la condizione richiesta è verificata.

Caso n dispari $(n - 6)^2 + 1$ è pari, quindi per verificare la condizione deve essere uguale a 2:

$$(n - 6)^2 + 1 = 2 \implies (n - 6)^2 = 1 \implies (n - 6) = \pm 1$$

Otteniamo così i due valori $n = 7$ e $n = 5$ che sono entrambi primi.

La risposta è quindi 3.

Quesito 4

Quale dei seguenti numeri è un divisore di $n = 3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?

(**A**) 42, (**B**) 45, (**C**) 52, (**A**) 85, (**E**) 105.

Quesito 4

Quale dei seguenti numeri è un divisore di $n = 3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?

(A) 42, (B) 45, (C) 52, (A) 85, (E) 105.

Soluzione

Scomponendo in fattori primi si ha:

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7,$$

$$45 = 3^2 \cdot 5,$$

$$52 = 2^2 \cdot 13,$$

$$85 = 5 \cdot 17,$$

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

La risposta è (B) perchè n contiene nella sua scomposizione in primi tutti i fattori di 45.

Divisibilità in $\mathbb{Z}$

Definizione

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Diciamo che a divide b se $\exists c \in \mathbb{Z}$ t.c. $b = ac$.

Lemma

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Allora esistono in $\mathbb{Z}$, univocamente determinati, il quoziente q e il resto r t.c. $a = bq + r$ con $0 \leq r \leq |b|$.

Definizione

Un numero $p \in \mathbb{N}$ è un *primo* se $p \neq 0, 1$ e se $a > 0$ divide $p \Rightarrow a = 1$ o $a = p$.

Teorema

I numeri primi sono infiniti.

Teorema

Ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ è prodotto di primi; tale scomposizione è unica a meno dell'ordine.

Quesito 5

E' dato un numero primo di tre cifre le cui cifre sono, nell'ordine: a, b, c . Quanti divisori primi ha il numero di sei cifre la cui scrittura è $abcabc$?

Quesito 5

E' dato un numero primo di tre cifre le cui cifre sono, nell'ordine: a, b, c . Quanti divisori primi ha il numero di sei cifre la cui scrittura è $abcabc$?

Soluzione

Osserviamo che:

$$abcabc = abc \cdot 1000 + abc = abc \cdot (1000 + 1) = abc \cdot 1001.$$

Scomponiamo 1001 in fattori primi: $1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$.

Essendo abc primo per ipotesi, $abcabc = abc \cdot 13 \cdot 11 \cdot 7$ e i quattro fattori sono tutti numeri primi.

La risposta è quindi 4.

Quesito 6

Data una tabella con 2 righe e 1007 colonne, scriviamo i numeri da 1 a 1007 sulla prima riga e i numeri da 1008 a 2014 sulla seconda riga, in ordine crescente. Le colonne individuano 1007 coppie di numeri naturali: in quante di queste coppie il numero che compare sulla seconda riga è un multiplo del relativo numero sulla prima riga?

Quesito 6

Data una tabella con 2 righe e 1007 colonne, scriviamo i numeri da 1 a 1007 sulla prima riga e i numeri da 1008 a 2014 sulla seconda riga, in ordine crescente. Le colonne individuano 1007 coppie di numeri naturali: in quante di queste coppie il numero che compare sulla seconda riga è un multiplo del relativo numero sulla prima riga?

Soluzione

1	2	...	...	...	1006	1007
1008	1009	...	...	...	2013	2014

Le coppie sono del tipo $(k, k + 1007)$.

k divide $k + 1007 \iff k$ divide 1007.

La scomposizione in fattori primi di 1007 è $19 \cdot 53$ quindi gli unici k possibili sono $k = 1, 19, 53, 1007$.

La risposta è 4.

Il crivello di Eratostene

Un algoritmo per determinare la lista dei numeri primi minori di $n \in \mathbb{N}$.

Ad esempio, vogliamo trovare i numeri primi ≤ 50 :

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Il crivello di Eratostene

Un algoritmo per determinare la lista dei numeri primi minori di $n \in \mathbb{N}$.

Ad esempio, vogliamo trovare i numeri primi ≤ 50 :

	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	

Il crivello di Eratostene

Un algoritmo per determinare la lista dei numeri primi minori di $n \in \mathbb{N}$.

Ad esempio, vogliamo trovare i numeri primi ≤ 50 :

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	

Il crivello di Eratostene

Un algoritmo per determinare la lista dei numeri primi minori di $n \in \mathbb{N}$.

Ad esempio, vogliamo trovare i numeri primi ≤ 50 :

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	

Cancellando i multipli di 7, rimangono tutti e soli i numeri primi ≤ 50 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

E' sufficiente fermarsi a 7 poiché 7 è il massimo numero primo $\leq \sqrt{50}$.

In generale: n è un numero primo se p non divide n , $\forall p \leq \sqrt{n}$.

(se q è un divisore di n e $q > \sqrt{n} \implies n = q \cdot s$, con $s \leq \sqrt{n}$).

Quesito 7

La media aritmetica di ventisette numeri naturali consecutivi è 2015.
Qual è il più piccolo di essi?

Quesito 7

La media aritmetica di ventisette numeri naturali consecutivi è 2015. Qual è il più piccolo di essi?

Soluzione

Sia n il quattordicesimo dei 27 numeri. Allora si ha:

$$\begin{aligned} 2015 &= \frac{(n-13) + (n-12) + \cdots + (n-1) + n + (n+1) + \cdots + (n+12) + (n+13)}{27} \\ &= \frac{27n}{27} = n. \end{aligned}$$

Quindi $n = 2015$ e il più piccoli dei numeri di cui si fa la media è $n - 13 = 2002$.

Quesito 8

Qual è la somma di tutti i numeri naturali formati da due cifre distinte?

Quesito 8

Qual è la somma di tutti i numeri naturali formati da due cifre distinte?

Soluzione

Il risultato è dato da $X - Y - Z$ dove, rispettivamente:

$$X = 1 + 2 + \cdots + 98 + 99 = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$$

$$Y = 1 + 2 + \cdots + 8 + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

$$Z = 11 + 22 + \cdots + 88 + 99 = 11(1 + 2 + \cdots + 8 + 9) = 11 \cdot 45$$

Il risultato è quindi $4950 - 45 \cdot 12 = 4950 - 540 = 4410$.

Particolari successioni in $\mathbb{N}$

La somma dei primi n numeri interi positivi è:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Un metodo di dimostrazione sfrutta il **Principio di Induzione**:

- banalmente, $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$$- \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Particolari successioni in $\mathbb{N}$

La somma dei primi n numeri dispari è:

1				
	3			
		5		
			7	
				9

$$\sum_{k=1}^n (2k + 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Particolari successioni in $\mathbb{N}$

La somma dei primi n numeri pari è:

	2				
		4			
			6		
				8	
					10

$$\sum_{k=1}^n (2k) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

Quesito 9

Qual è il più grande degli interi positivi n tali che la media aritmetica dei numeri da 1 a n sia < 2015 ?

Quesito 9

Qual è il più grande degli interi positivi n tali che la media aritmetica dei numeri da 1 a n sia < 2015 ?

Soluzione

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \implies \text{la media aritmetica è } \frac{n+1}{2}.$$

$$\text{Ora } \frac{n+1}{2} < 2015 \iff n < 4029.$$

Ne deriva che il numero cercato è 4028.

Vogliamo risolvere questi 3 quesiti:

Qual è il resto della divisione per 3 di 2014^{2014} ?

Qual è il resto della divisione per 3 di 2015^{2015} ?

Qual è il resto della divisione per 127 di 1274^{2903} ?

Congruenza e classi di resto

Dato $n \in \mathbb{N}$ è definita la seguente relazione:

$$a\mathcal{R}b \iff n \text{ divide } a - b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } b = a + nk$$

Risulta essere una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ detta *congruenza modulo n* , indicata con $a \equiv b(n)$.

Se r è il resto della divisione di a per n , allora r è detto *resto di $a \bmod n$* e si ha $a \equiv r(n)$. Ne deriva che $a \equiv b(n)$ **equivale a dire che a e b hanno lo stesso resto mod n .**

La relazione di congruenza individua classi di equivalenza: $[a]_n$ è l'insieme di tutti gli elementi di $\mathbb{Z}$ che sono in relazione con a , quindi che hanno lo stesso resto mod n , cioè:

$$[a]_n = \{a + kn, k \in \mathbb{Z}\}$$

Congruenza e classi di resto

Ad esempio, $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$, dove:

$$[0] = \{kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$[1] = \{1 + kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$[2] = \{2 + kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

Nell'insieme $\mathbb{Z}_n$ delle classi di resto modulo n si definiscono le operazioni di addizione e moltiplicazione in modo naturale:

$$[\mathbf{h}]_n + [\mathbf{k}]_n = [\mathbf{h} + \mathbf{k}]_n \quad \text{e} \quad [\mathbf{h}]_n \cdot [\mathbf{k}]_n = [\mathbf{h} \cdot \mathbf{k}]_n$$

Ad esempio: $[2]_5 \cdot [4]_5 = [8]_5 = [3]_5$ poiché $8 \equiv 3(5)$.

Quesito 10

Qual è il resto della divisione per 3 di 2014^{2014} ?

Quesito 10

Qual è il resto della divisione per 3 di 2014^{2014} ?

Soluzione

$2014 = 671 \cdot 3 + 1$, cioè $2014 \equiv 1(3)$.

Quindi $[2014^{2014}]_3 = [1^{2014}]_3 = [1]_3$,

ovvero il resto della divisione è 1.

Quesito 11

Qual è il resto della divisione per 3 di 2015^{2015} ?

Quesito 11

Qual è il resto della divisione per 3 di 2015^{2015} ?

Soluzione

$2015 = 671 \cdot 3 + 2$, cioè $2015 \equiv 2(3)$. Quindi $[2015^{2015}]_3 = [2^{2015}]_3$.

Osserviamo poi che:

$$2^1 \equiv 2(3), 2^2 \equiv 1(3), 2^3 \equiv 2(3), 2^4 \equiv 1(3), \dots$$

$$\text{cioè } 2^{2^n} \equiv 1(3) \text{ e } 2^{2^n+1} \equiv 2(3) \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si deduce quindi che $[2^{2015}]_3 = [2]_3$, cioè il resto della divisione è 2.

Piccolo Teorema di Fermat

Teorema

Se p è un numero primo e a è un intero non divisibile per p , allora:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Una generalizzazione per moduli qualunque è il **Teorema di Eulero**:

Teorema

Sia m un intero ≥ 2 e a un intero coprimo con m . Allora

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

dove $\phi(m)$ è la funzione di Eulero, cioè il numero degli interi tra 1 e n coprimi con n (ad esempio $\phi(8) = 4$ poiché i numeri coprimi con 8 sono 1, 3, 5, 7).

E' immediato verificare che se m è un numero primo allora $\phi(m) = m - 1$, quindi il Teorema di Eulero si riduce al Teorema di Fermat: $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$.

Quesito 12

Qual è il resto della divisione per 127 di 1274^{2903} ?

Quesito 12

Qual è il resto della divisione per 127 di 1274^{2903} ?

Soluzione

Essendo $1274 = 127 \cdot 10 + 4$ si ha che $1274^{2903} \equiv 4^{2903}(127)$.

Inoltre si verifica che 127 è un numero primo ($\sqrt{127} = 11.2\dots$ quindi basta controllare che p non divide 127 $\forall p$ primo, $p \leq 11$).

Per applicare il **Piccolo Teorema di Fermat** scriviamo:

$2903 = 23(127 - 1) + 5$ in modo da avere:

$$4^{2903} = 4^{23 \cdot 126 + 5} = (4^{126})^{23} 4^5 \equiv (1)^{23} 4^5 \equiv 4^5(127).$$

Infine $[4^5]_{127} = [256 \cdot 4]_{127} = [2 \cdot 4]_{127} = [8]_{127}$, quindi il resto è 8.

Quesito 13

Si considerino i numeri naturali n di 3 cifre tali che verificano la seguente proprietà: le cifre di n sono tre numeri consecutivi in qualunque ordine (ad esempio 435 oppure 879). Quanti di questi numeri sono primi?

Quesito 13

Si considerino i numeri naturali n di 3 cifre tali che verificano la seguente proprietà: le cifre di n sono tre numeri consecutivi in qualunque ordine (ad esempio 435 oppure 879). Quanti di questi numeri sono primi?

Soluzione

Osserviamo che le cifre, essendo 3 numeri consecutivi, verificano la seguente proprietà $\forall n$:

una cifra è $\equiv 0(3)$, un'altra è $\equiv 1(3)$ e la rimanente è $\equiv 2(3)$.

Ne viene che la loro somma è sempre un numero congruo a 0 *mod* 3, cioè divisibile per 3.

Di conseguenza tutti i numeri n descritti sono numeri composti perchè hanno almeno un divisore proprio (3).

Criteri divisibilità

Indicando un numero intero con le sue cifre $a_0, \dots, a_n$, alcuni noti criteri di divisibilità sono:

- un intero $a_n \dots a_0$ è divisibile per 5 se e solo se $a_0 = 0$ o $a_0 = 5$
- un intero $a_n \dots a_0$ è divisibile per 4 se e solo se $a_1 a_0$ è divisibile per 4
- un intero $a_n \dots a_0$ è divisibile per 3 se e solo se $a_0 + \dots + a_n$ è divisibile per 3
(dim: $a_n \dots a_0 = a_n 10^n + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ e $10^n \equiv 1(3) \forall n \in \mathbb{N}$)
- un intero $a_n \dots a_0$ è divisibile per 9 se e solo se $a_0 + \dots + a_n$ è divisibile per 9
- un intero $a_n \dots a_0$ è divisibile per 11 se e solo se $a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n$ è divisibile per 11