

Successioni e Progressioni

Una **successione** è una **sequenza ordinata di numeri appartenenti ad un insieme assegnato**: ad esempio, si possono avere successioni di numeri interi, razionali, reali, complessi. Il primo elemento della sequenza viene, convenzionalmente, chiamato a_0 , il secondo a_1 e così via; a_n è il termine generale.

I modi in cui vengono di norma descritte le successioni sono due:

1. con una legge: ciascun termine a_n è assegnato mediante una funzione che, in generale, dipende da n . Ad esempio, $a_n = 2n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$, è la successione dei numeri dispari;
2. ricorsivamente: ciascun termine a_n è assegnato mediante una funzione ricorsiva che, in generale, dipende dai termini precedenti $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$. Ad esempio, la successione

definita da
$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} \quad \text{con } n > 1$$
 è la celeberrima **successione di Fibonacci**:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Una categoria che merita un più accurato esame è quella delle progressioni, successioni dipendenti linearmente dal solo termine precedente.

Progressioni aritmetiche

Una successione di numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$ si dice **progressione aritmetica** se è definita ricorsivamente

nel seguente modo:
$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_n = a_{n-1} + d \end{cases}$$

cioè se la differenza tra due termini consecutivi è costante ed uguale alla ragione d della progressione. Sulle progressioni aritmetiche si possono dimostrare facilmente le seguenti formule:

- Il termine generale a_n si può esprimere come $a_n = a_1 + (n - 1) d$.
Infatti, poichè : $a_2 - a_1 = d$; $a_3 - a_2 = d$; $a_n - a_{n-1} = d$, sommando membro a membro si ottiene: $a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \dots + a_n - a_{n-1} = (n - 1)d$, da cui si ha: $-a_1 + a_n = (n - 1)d$.
- Il generico termine a_r si può esprimere come $a_r = a_s + (r - s) d$.
Infatti: $a_r = a_{r-1} + d = a_{r-2} + 2d = \dots = a_s + (r - s) d$.
- La somma dei primi n termini è: $S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n$.
Infatti si scrive S_n a partire dal primo termine aggiungendo d fino al termine n -esimo: $S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + a_n$. Ora si scrive S_n a partire dal termine n -esimo sottraendo d fino al primo termine: $S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + a_1$. Sommando membro a membro si ottiene:
 $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) = (a_1 + a_n)n$.
- La somma dei termini da a_r a a_s è: $S = \frac{1}{2}(a_r + a_s)(r - s + 1)$.
Infatti $a_r + a_s = (a_{r+1} - d) + (a_{s-1} + d) = a_{r+1} + a_{s-1}$, e dunque: $2S = 2(a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_{s-2} + a_{s-1} + a_s) = (a_r + a_s) + (a_{r+1} + a_{s-1}) + \dots + (a_{s-1} + a_{r+1}) + (a_s + a_r) = (a_r + a_s)(r - s + 1)$.

Esempio 1

Data la successione: $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 7 \end{cases}$, scrivere il decimo termine della successione a_{10} in termini del terzo termine a_3 e calcolare la somma dei termini compresi tra questi 2.

SOLUZIONE

Si ha $a_{10} = a_3 + (10 - 3) \cdot 7 = a_3 + 49$; la somma dei termini dal quarto al nono è

$$S = \frac{1}{2}(a_4 + a_9)(9 - 4 + 1) = \frac{1}{2}(a_1 + 21 + a_1 + 56) \cdot 6 = 246.$$

Progressioni geometriche

Una successione di numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$ si dice **progressione geometrica** se è definita

ricorsivamente nel seguente modo:
$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_n = k \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

cioè se il rapporto tra due termini consecutivi è costante ed uguale alla ragione k della progressione. Sulle progressioni geometriche si possono dimostrare facilmente le seguenti formule:

- Il termine generale a_n si può esprimere come $a_n = a_1 k^{n-1}$

Infatti: $a_2 = ka_1, a_3 = ka_2, \dots, a_{n-1} = ka_{n-2}, a_n = ka_{n-1}$. Moltiplicando membro a membro si ottiene:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot \underbrace{k \cdot \dots \cdot k}_{(n-1) \text{ volte}}, \text{ da cui } a_n = a_1 k^{n-1}.$$

- Il generico termine a_r si può esprimere come $a_r = a_s k^{(r-s)}$

Infatti: $a_r = ka_{r-1} = k^2 a_{r-2} = \dots = k^{(r-s)} a_s$.

- La somma dei primi n termini è: $S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$.

Infatti: $a_2 = ka_1, a_3 = ka_2 = k^2 a_1, \dots, a_{n-1} = k^{n-2} a_1, a_n = k^{n-1} a_1$.

Quindi: $S_n = a_1 + \dots + a_n = a_1 + ka_1 + k^2 a_1 + \dots + k^{n-1} a_1$.

Moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza sopra scritta per k e sottraendo S_n si ottiene:

$kS_n - S_n = ka_1 + k^2 a_1 + \dots + k^n a_1 - a_1 - ka_1 - k^2 a_1 - \dots - k^{n-1} a_1 = k^n a_1 - a_1$. La tesi.

- La somma dei termini da a_r a a_s è: $S = a_r \frac{k^{(s-r+1)} - 1}{k - 1}$.

Infatti: $S = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_{s-1} + a_s = a_r (1 + k + k^2 + \dots + k^{(s-r-1)} + k^{(s-r)}) = a_r \frac{k^{(s-r+1)} - 1}{k - 1}$.

- Il prodotto di n termini è: $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$.

Infatti: $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$.

Per la proprietà commutativa del prodotto si può scrivere:

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1.$$

Moltiplicando membro a membro si ottiene: $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot \dots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$;

ma ogni fattore del prodotto sopra scritto gode della **proprietà** che il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed è uguale al prodotto dei termini estremi: se p, r sono i termini equidistanti dagli estremi, è $p \cdot r = a_1 \cdot a_n$. Pertanto: $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$ da cui $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$.

- Il prodotto dei termini da a_r a a_s è: $P = \sqrt{(a_r \cdot a_s)^{(r-s+1)}}$.

Infatti: $P^2 = a_r a_s \cdot a_{r+1} a_{s-1} \cdot \dots \cdot a_{s-1} a_{r+1} \cdot a_s a_r = (a_r \cdot a_s)^{(r-s+1)}$.

Esempio 2

Data la successione: $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 7a_{n-1} \end{cases}$, scrivere il decimo termine della successione a_{10} in termini del

terzo termine a_3 e calcolare la somma dei termini compresi tra questi 2. Calcolare inoltre il prodotto dei primi 3 termini.

SOLUZIONE

Si ha $a_{10} = a_3 \cdot 7^{(10-3)} = a_3 \cdot 7^7$; la somma dei termini dal quarto al nono è:

$$S = a_4 \frac{7^{(9-4+1)} - 1}{7 - 1} = 1715 \cdot \frac{117648}{6} = 33627720.$$

Il prodotto dei primi 3 termini è: $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_3)^{(3-1+1)}} = \sqrt{(5 \cdot 245)^3} = 42875$.

Progressioni miste

Una successione di numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$ si dice **progressione mista** se non è nè geometrica, nè aritmetica, ma è definita ricorsivamente nel seguente modo: $\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_n = k \cdot a_{n-1} + d \end{cases}$ con $k \neq 1, d \neq 0$.

Per le progressioni miste è valida la seguente formula, della quale si omette la dimostrazione:

il generico termine a_r si può esprimere come: $a_r = k^r a_0 + \frac{k^r - 1}{k - 1} d$.

Esempio 3

Data la successione: $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 7a_{n-1} + 6 \end{cases}$, scrivere il decimo termine della successione a_{10} in termini del terzo termine a_3 .

SOLUZIONE

Si ha $a_{10} = a_3 \cdot 7^{(10-3)} + 6 \cdot \frac{7^{(10-3)} - 1}{7 - 1} = 77 \cdot 7^7 + 6 \cdot \frac{7^7 - 1}{6} = 78 \cdot 7^7 - 1 = 64.236.353$.

Successioni per ricorrenza lineari

Nella successione $\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_1 = x_1 \\ x_{n+1} = \alpha \cdot x_n + \beta \cdot x_{n-1} \end{cases}$

sono dati i primi due termini e ciascuno dei successivi dipende dai due termini immediatamente precedenti. Esiste un metodo per scrivere il termine generico x_r in modo che dipenda solo da r . Si risolve innanzitutto l'equazione $x^2 - \alpha x - \beta = 0$. Se le due soluzioni S_1 e S_2 sono distinte, allora si può dimostrare che $x_r = a \cdot S_1^r + b \cdot S_2^r$, con a e b coefficienti opportuni. Per trovare a e b , si sostituisce prima $r = 0$ e poi $r = 1$ nell'espressione di x_r , ottenendo un sistema di due equazioni in a, b che si risolve utilizzando i valori noti di x_0 e x_1 . Se invece le soluzioni coincidono, cioè se $S_1 = S_2 = S$, allora si può dimostrare che $x_r = a \cdot S^r + b \cdot r \cdot S^r = (a + b \cdot r) S^r$, con a e b coefficienti opportuni che si determinano come nel caso precedente.

Esempio 4

Data la seguente successione, detta successione di Fibonacci: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \end{cases}$

ricavare l'espressione del termine generico x_r .

SOLUZIONE

Si tratta della successione 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Qui $\alpha = \beta = 1$, quindi si deve risolvere

dapprima $x^2 - x - 1 = 0$. Le soluzioni sono diverse: $S_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $S_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Quindi

$x_r = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^r + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^r$. Se $r = 0$ allora $0 = a + b$ cioè $b = -a$; se $r = 1$ allora

$1 = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = a\sqrt{5}$ e quindi $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Si può scrivere ora: $x_r = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^r - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^r \right)$.

Nota bene: sommando numeri naturali si ottengono numeri naturali, quindi nonostante compaiano radici nell'espressione di x_r , queste si semplificano sempre quando si sviluppano le potenze.

Esempio 5

Data la seguente successione: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1} \end{cases}$, ricavare l'espressione del termine generico x_r .

SOLUZIONE

Si tratta della successione 0, 1, 5, 19, 65, ... Qui $\alpha = 5$ e $\beta = -6$, quindi si deve risolvere dapprima $x^2 - 5x + 6 = 0$. Le soluzioni sono diverse: $S_1 = 3$ e $S_2 = 2$. Quindi $x_r = a3^r + b2^r$. Se $r = 0$ allora $0 = a + b$ cioè $b = -a$; se $r = 1$ allora $1 = 3a + 2b = 3a - 2a = a$ e quindi $a = 1$ e $b = -1$. Segue che $x_r = 3^r - 2^r$.

Esempio 6

Data la seguente successione: $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_1 = 21 \\ x_{n+1} = 6x_n - 9x_{n-1} \end{cases}$, calcolare $\frac{x_{88}}{3^{88}}$.

SOLUZIONE

Conviene scrivere il termine generico. Poiché $\alpha = 6$ e $\beta = -9$, l'equazione $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$ ha due soluzioni coincidenti $S_1 = S_2 = S = 3$. Quindi $x_r = a \cdot 3^r + b \cdot r \cdot 3^r$. Se $r = 0$ allora $2 = a$; se $r = 1$ allora $21 = 3a + 3b = 6 + 3b$ e quindi $a = 2$ e $b = 5$. Segue che $x_r = 2 \cdot 3^r + 5 \cdot r \cdot 3^r = (2 + 5r) \cdot 3^r$. Per trovare il risultato basta adesso sostituire $r = 88$, ottenendo $x_{88} = 442 \cdot 3^{88}$ e $\frac{x_{88}}{3^{88}} = 442$.

ESERCIZI

1. Data la successione: $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} - 1 \end{cases}$

- calcolare la somma dei primi 11 termini;
- esprimere, mediante il quinto termine della successione, a_{12} .

2. Data la successione: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} \end{cases}$

- calcolare la somma dei primi 7 termini;
- calcolare la somma dei termini dal terzo al sesto;
- calcolare il prodotto dei primi 4 termini;
- calcolare il prodotto dei termini dal terzo al sesto;
- esprimere, mediante il secondo termine della successione, a_5 .

3. Data la successione: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + 1 \end{cases}$

- calcolare la somma dei primi 4 termini;

b) esprimere, mediante il secondo termine della successione, a_{10} .

4. Sia a_n la successione così definita: $\begin{cases} a_0 = x \\ a_n = 2a_{n-1} - 1 \end{cases}$. Sapendo che $a_{2000} = 2^{2001} + 1$, quanto vale x ?
5. Calcolare la somma dei numeri che compongono le terne formate da tre elementi che sono in progressione aritmetica (crescente o decrescente) e sono tali che la loro somma sia 27, il loro prodotto sia 585.
6. Determinare il numero n dei termini di una progressione aritmetica la cui somma è 136, la cui ragione è 6 e il cui termine generale vale 38.
7. Il professor Generosi ha 12 figli. Per Natale compera loro dei cioccolatini. Sapendo che il primogenito ne mangia la metà più uno, il secondogenito mangia la metà di quelli che trova più uno, il terzogenito la metà di quelli che trova più uno, fino all'ultimo figlio, il dodicesimo, che mangia la metà dei cioccolatini trovati più uno, lasciando la confezione vuota, quanti cioccolatini ha comperato il prof. Generosi?
8. La combinazione per aprire una cassaforte è data da una sequenza di quattro numeri ottenuti considerando i termini della successione $a_n = n^2 - n$ per i valori di n generati nell'ordine dal quarto, sesto, nono, undicesimo termine della successione $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 3 \\ b_n = 3b_{n-1} - 2b_{n-2} \end{cases}$; quindi di ogni numero trovato si consideri la somma delle cifre, che deve essere effettuata finché non ci si riduce ad un numero di una sola cifra. Qual è la combinazione della cassaforte?
9. In una matrice di 4 righe per 13 colonne sono memorizzate le 52 carte di un mazzo da gioco: i semi (cuori = 1, quadri = 2, fiori = 3, picche = 4) sulle righe, le carte (Asso = 1, ..., Fante = 11, Donna = 12, Re = 13) sulle colonne. Si decide di scoprire le carte che sono memorizzate nelle caselle di posto (a_n, b_n) , dove $a_n = (n + 2) \bmod 4 + 1$, $b_n = (n + 5) \bmod 13 + 1$. [N.B. $P \bmod Q$ è il resto della divisione $P:Q$] Calcolare la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari del prodotto dei numeri associati alle prime 10 carte scoperte.
10. Sia Q un quadrato di lato unitario; sia Q_1 il quadrato ottenuto congiungendo i punti medi dei lati di Q ; sia Q_2 il quadrato ottenuto congiungendo i punti medi dei lati di Q_1 ; e così via! Si costruisce quindi una successione di quadrati inscritti uno nell'altro. Calcolare la quarta potenza del rapporto tra le ragioni della successione dei perimetri con la successione delle aree dei quadrati.

11. Data la successione: $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 30 \\ x_{n+1} = 10x_n - 25x_{n-1} \end{cases}$, calcolare $\frac{x_{1962}}{5^{1962}}$.