

Polinomi

Soluzioni esercizi

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni (reali) dell'equazione $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1$ soggetta alla condizione $x + y + z = 1$.

La simmetria del problema suggerisce di scrivere quest'equazione in funzione dei polinomi simmetrici elementari. Detti $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$ e $\sigma_3 = xyz$, con semplici calcoli si vede che l'equazione in questione equivale a $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 + \sigma_3 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 1$. Ponendo ora $\sigma_1 = 1$, si ottiene $2\sigma_2^2 - \sigma_2 + 1 = 0$, che non ha soluzioni (reali).

Esercizio 2. Trovare i valori di a per i quali la somma dei quadrati delle radici dell'equazione $x^2 - (a - 2)x - a - 1 = 0$ risulta minima.

Si ha $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a - 2)^2 + 2(a + 1) = a^2 - 2a + 6 = (a - 1)^2 + 5$. Chiaramente il minimo di quest'espressione si ottiene ponendo $a = 1$.

Esercizio 3. Siano α , β e γ le tre radici dell'equazione $x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = 0$. Trovare un polinomio che abbia come radici α^2 , β^2 e γ^2 .

Il nuovo polinomio (monico) deve avere come coefficiente di x^2 l'espressione $-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = -[(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)] = -(5^2 - 2 \cdot 4) = -17$. Analogamente il coefficiente di x dev'essere $\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 = -14$. Infine, il termine noto sarà $-\alpha^2\beta^2\gamma^2 = -(\alpha\beta\gamma)^2 = -9$.

In definitiva, il polinomio (monico) cercato è $x^3 - 17x^2 - 14x - 9$. Naturalmente ogni altro polinomio multiplo di questo soddisferà le stesse richieste.

Esercizio 4. Siano α , β , γ e δ le radici del polinomio $x^4 - 10x^3 + 15x - 3$. Calcolare il valore di:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}.$$

Questo esercizio serve a prendere dimestichezza con i polinomi simmetrici in quattro variabili, ma di per sé non richiede troppo sforzo. Si ha infatti

facilmente

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{-15}{-3} = 5.$$

Esercizio 5. Trovare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0.$$

L'equazione è quadratica in x , quindi ha soluzioni se e solo se $\Delta \geq 0$. Vediamo se questa condizione ci fornisce qualche informazione utile. Dopo aver riordinato il polinomio, si ha:

$$\Delta = 16(y^2 + y - 10)^2 - 32(y^4 - 11y^2 - 8y + 52) = -16(y^2 - y - 2)^2.$$

A questo punto possiamo sperare al massimo in $\Delta = 0$, il che ci dà $y_1 = 2$ e conseguentemente $x_1 = 1$, oppure $y_2 = -1$ con $x_2 = 5/2$.