

1. LE ZUCCHE DI HALLOWEEN [6]

Riscriviamo la prima equazione costruendo a secondo termine un quadrato di binomio:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab.$$

Dalla prima equazione ricaviamo $a+b=14-c$:

$$c^2 = (14-c)^2 - 28 \text{ che risolta}$$

$$c^2 = 196 - 28c + c^2 - 28$$

$$c = 6$$

2. I BAMBINI [83]

Ragioniamo sulla cifra delle unità che verificherà la congruenza $A^2 + B^2 \equiv B \pmod{10}$

Esistono solo quattro casi:

$$A=2, B=3 \quad 2^2 + 3^2 = 4+9=13 \equiv 3 \pmod{10}, \text{ ma } 23^2 + 32^2 = 1553;$$

$$A=2, B=8 \quad 2^2 + 8^2 = 4+64=68 \equiv 8 \pmod{10}, \text{ ma } 28^2 + 82^2 = 7508;$$

$$A=8, B=3 \quad 8^2 + 3^2 = 64+9=73 \equiv 3 \pmod{10}, \text{ e } 38^2 + 83^2 = 8333 \text{ l'unica soluzione cercata;}$$

$$A=8, B=8 \quad 8^2 + 8^2 = 64+64=128 \equiv 8 \pmod{10}, \text{ ma } 88^2 + 88^2 = 15488.$$

3. DOLCETTO O SCHERZETTO? [128]

Eseguiamo la divisione tra i due polinomi $x^7 + 64x^2$ e $x^3 + 4x - 8$:

$$x^7 + 64x^2 = (x^4 - 4x^2 + 8x + 16)(x^3 + 4x - 8) + 128.$$

Siccome $x^3 + 4x = 8$, $x^7 + 64x^2 = 128$.

4. LE CARMELLE DELLA VECCHIA SIGNORA [88]

La richiesta del problema è trovare gli n , $10 \leq n < 100$ tali che $100 \mid (2n^2 - n)$.

Siccome $2n^2 - n = n(2n-1)$ e n e $2n-1$ sono primi tra loro, deve accadere che o $4 \mid (2n-1)$ e $25 \mid n$ o $4 \mid n$ e $25 \mid (2n-1)$, ma il primo è impossibile in quanto $2n-1$ è dispari.

Resta il secondo caso: $4 \mid n \Rightarrow n = 4k$, di conseguenza $25 \mid (8k-1)$, cioè $8k-1 = 25h$ che possiamo

$$\text{riscrivere } k = \frac{25h+1}{8} = \frac{24h+h+1}{8} = 3h + \frac{h+1}{8}.$$

$$h+1=0 \text{ ci porta ad un caso } n < 0;$$

$$h+1=8 \Rightarrow h=7 \Rightarrow k=22 \Rightarrow n=88;$$

$$h+1=16 \Rightarrow h=15 \Rightarrow k=46 \Rightarrow n=184 > 100.$$

Non ci sono altre soluzioni al di fuori di $n=88$.

5. LO SCHERZO DELLA VECCHIA SIGNORA [6]

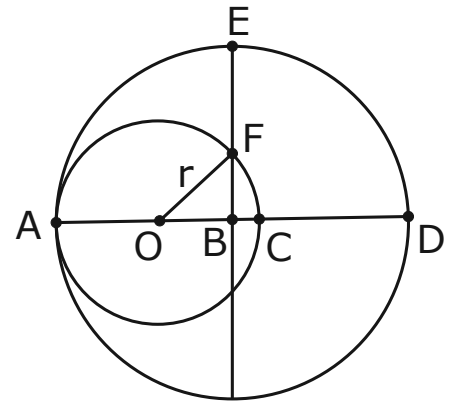
Osserviamo che in generale $n! \mid m! \Leftrightarrow n \leq m$, questo per definizione di fattoriale. Nel nostro caso accade che $((n!)!) \mid (2015!) \Leftrightarrow (n!)! \leq 2015! \Leftrightarrow n! \leq 2015$. Considerando che $6! = 720$ e $7! = 5040$, il più grande valore possibile per n è 6.

6. LE ZUCCHE SCOLPITE [9675]

Detti r il raggio della circonferenza più piccola e R il raggio di quella più grande, si osserva che valgono le seguenti relazioni: $AD - AC = CD$ cioè $2R - 2r = 42$ e $OB^2 + FB^2 = OF^2$, dove O è il centro della circonferenza minore, relazione che diventa $(R - r)^2 + (R - 24)^2 = r^2$.

Semplificando la prima si ottiene $R - r = 21$ che sostituita nella seconda porta all'equazione

$$21^2 + (R - 24)^2 = (R - 21)^2. \text{ Ne segue che } R = 96 \text{ e } r = 75.$$



7. I FOLLETTI [13]

L'operazione in base x $53_x \cdot 15_x = 732_x$ può essere scritta in base 10:

$$(5x + 3) \cdot (x + 5) = 7x^2 + 3x + 2, \text{ equazione che diventa}$$

$2x^2 - 25x - 13 = 0$. Le due soluzioni sono $x_1 = -\frac{1}{2}$, soluzione non accettabile e $x_2 = 13$, la soluzione cercata.

8. LA RISPOSTA DELLA VECCHIA SIGNORA [9]

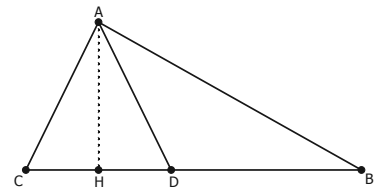
Detta x la misura del lato AB esprimiamo l'altezza AH relativa al lato BC mediante il Teorema di Pitagora in due modi:

$$AC^2 - CH^2 = AB^2 - BH^2$$

$$3^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - \left(8 + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2 = 81$$

e cioè $x = 9$.



9. LE ZUCCHE E I COLORI [500]

Detta x la capacità della zucca C , nella zucca A la quantità di blu finale sarà pari a $16 - x + \frac{x}{x + 20} \cdot x$, mentre la parte di bianco sarà pari a $\frac{20}{x + 20} \cdot x$.

$$\text{Il rapporto è dato da : } \frac{16 - x + \frac{x}{20 + x} \cdot x}{\frac{20}{20 + x} \cdot x} = \frac{3}{1}.$$

$$\text{Risolvendo: } (16 - x)(20 + x) + x^2 = 60x$$

$$64x = 320$$

$$x = 5 \text{ litri} = 500 \text{ cl}.$$

10. LA CASA DEL MATEMATICO [1606]

Siano a e b le due soluzioni reali del polinomio. Essendo monico di terzo grado, dovrà essere del tipo $(x - a)^2(x - b)$, cioè del tipo $x^3 - (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab)x - a^2b$.

Impostando un sistema sulle due informazioni note si ha:

$$\begin{cases} 2a + b = 33 \\ a^2 + 2ab = 315 \end{cases} \text{ che risolto ha due soluzioni: } (15; 3) \text{ e } (7; 19).$$

I due possibili termini noti sono 675 e 931. La soluzione del problema è $675 + 931 = 1606$.

11. LA CASA DEL MATEMATICO II [2058]

Scomponendo in fattori primi si scopre che $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Il problema chiede di trovare il prossimo anno n che avrà solamente 2, 3 e 7 nella sua fattorizzazione (con $n > 2016$).

Osserviamo che entrambi sono multipli di $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, e quindi anche $n - 2016 = 42k$.

Osserviamo che dovrà essere $n = 2016 + 42k = 42(48 + k)$ e $48 + k$ deve essere il più piccolo possibile e scritto come prodotto di soli fattori 2, 3 e 7. La soluzione è $48 + k = 49 = 7^2$, $k = 1$ e $n = 2058 = 2 \cdot 3 \cdot 7^3$.

12. IL VESTITO DA STREGA [9842]

Visto che il numero di diagonali di un poligono di n lati si calcola mediante la formula $\frac{n(n-3)}{2}$, il

calcolo richiesto è $\sum_{i=3}^{40} \frac{i(i-3)}{2} = \sum_{i=1}^{40} \frac{i(i-3)}{2} + 2$, dove nella seconda parte della formula abbiamo esteso la sommatoria ai casi $i=1$ e $i=2$ per comodità di calcolo.

Risolviamo la sommatoria nel caso generale:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{i(i-3)}{2} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{3}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1-9}{6} = \\ &= \frac{n(n+1)(n-4)}{6} \end{aligned}$$

Non dimentichiamo che dobbiamo aggiungere 2 per togliere i casi $i=1$ e $i=2$ dalla sommatoria.

Nel caso $n=40$ otteniamo $\frac{40 \cdot 41 \cdot 36}{6} + 2 = 9842$.

13 LA MAPPA DELLA PIAZZA [135]

Risolviamo il problema in maniera generale: Sia $AB = a$ e $DC = b$.

Siano $FI = IL = LG = x$ e $EM = MN = NH = y$.

Poniamo la nostra attenzione su x . Sia $AZ = p$ l'altezza del trapezio e sia $AV = pk$.

I triangoli ACB e ICG sono simili, così come ADC e AFI .

Possiamo scrivere che $a : p = 2x : p(1-k)$ e $b : p = x : pk$

Da cui segue che $2x = a(1-k)$ e $x = bk$. Sostituendo la x nella prima equazione otteniamo

$$2bk = a - ak,$$

$$(2b + a)k = a$$

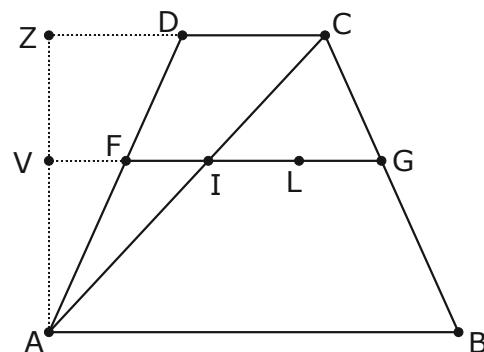
$$k = \frac{a}{a + 2b}$$

e quindi

$$x = \frac{ab}{a + 2b}$$

In maniera del tutto analoga possiamo determinare $y = \frac{ab}{2a + b}$

$$\text{Il problema chiede } 3x + 3y = \frac{3ab}{a + 2b} + \frac{3ab}{2a + b} = 3ab \left(\frac{1}{a + 2b} + \frac{1}{2a + b} \right) = 3 \cdot 56 \cdot 84 \left(\frac{1}{224} + \frac{1}{196} \right) = 135 \text{ m}$$



14 LA PISCINA [8168]

Il solido rappresentato dal volume della piscina altro non è che un cilindro sezionato con un piano obliquo rispetto alla sua altezza. Se immaginiamo di prendere un altro solido, identico al primo, e di sovrapporre le due facce “oblique” il risultato è un cilindro con cerchio di base di diametro 40 m e altezza 13 m, di volume doppio rispetto a quello richiesto.

$$\text{Il volume cercato è } V = \frac{20^2 \pi \cdot 13}{2} = 2600\pi \text{ m}^3 \cong 8168,16 \text{ m}^3$$

15. LA DOMANDA MISTERIOSA [5280]

Il problema è equivalente a determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19$ con il vincolo $0 \leq x_i \leq 9$ con $1 \leq i \leq 5$.

Risolviamo innanzi tutto senza preoccuparci del vincolo usando le combinazioni con ripetizione.

$$\text{Il numero delle soluzioni è } \binom{19+5-1}{19} = \binom{23}{19} = 8855.$$

Ora se uno dei valori x_i supera 9, gli altri sono necessariamente minori o uguali a 9. Calcoliamo il numero di casi in cui $x_1 \geq 10$: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19$, $\overline{x_1} + 10 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19$ e quindi

$$\overline{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9. \text{ Vi sono } \binom{9+5-1}{9} = \binom{13}{9} = 715 \text{ casi possibili.}$$

La soluzione del problema è dunque $8855 - 5 \cdot 715 = 5280$.

16. LA RICCHEZZA [641]

Sviluppiamo secondo il binomio di Newton dopo aver scritto $101 = 1 + 100$:

$$101^{20} = (1+100)^{20} = 1^{20} + \binom{20}{1} 1^{19} \cdot 100^1 + \binom{20}{2} 1^{18} \cdot 100^2 + \binom{20}{3} 1^{17} \cdot 100^3 + \binom{20}{4} 1^{16} \cdot 100^4 + \dots$$

Il primo termine vale 1, il secondo 2000, il terzo 1.900.000 il quarto 1.140.000.000 e il quinto 484.500.000.000. I termini dal sesto in poi, a causa delle potenze di 100 non influenzeranno più le cifre di 10^8 , 10^7 e 10^6 . La somma dei cinque numeri ci dà 485.641.902.001. Le cifre richieste sono 641

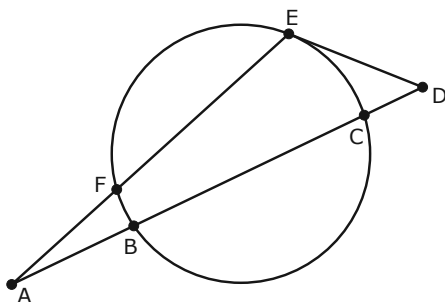
17 LA MAPPA DEI RAGAZZI [11]

Usiamo il teorema delle secanti per calcolare la misura di AC: infatti $AE \cdot AF = AB \cdot AC$ da cui segue che

$$AC = \frac{AE \cdot AF}{AB} = \frac{10 \cdot 4}{5} = 8 \text{ m e di conseguenza } BC = 3 \text{ m.}$$

Usiamo il teorema delle secante e della tangente per determinare la misura di DC = x: infatti $DE^2 = DC \cdot DB$ e di conseguenza $x \cdot (3+x) = 18$ equazione che risolta porta a determinare $x = 3$ come unica soluzione accettabile.

$$AD = 5 + 3 + 3 = 11 \text{ m.}$$



18 LA MAPPA DEI RAGAZZI II [24]

L'area può essere trovata facilmente trasformando il quadrilatero in un triangolo con lati pari alla misura delle diagonali e angolo di 30° tra essi. L'altezza relativa ad un lato è pari alla metà della misura dell'altro lato (perché il triangolo 30° , 60° e 90° è metà triangolo equilatero).

$$A = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24 \text{ m}^2.$$

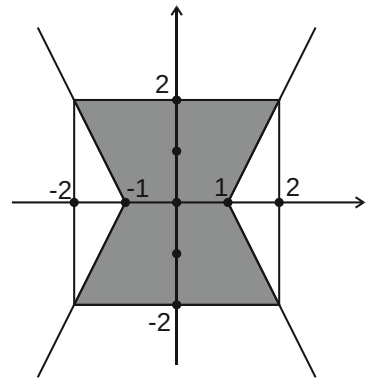
19 I NIPOTI DELLA VECCHIA SIGNORA [7]

Cambiando lettere e spostandosi sul piano cartesiano, rappresentiamo graficamente la disequazione $2|x| - |y| \leq 2$. Valutiamo a 4 casi dati dai valori assoluti:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 2x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ y \leq -2x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq -2x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ y \leq 2x + 2 \end{cases}$$

La probabilità cercata è data dal rapporto tra l'area della parte grigia e l'area del quadrato di lato 4:

$$P = \frac{(4+2) \cdot 2}{4^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

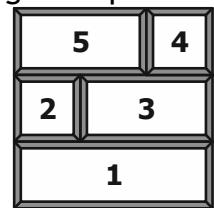
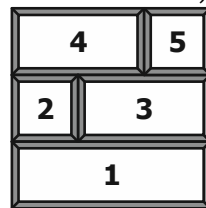
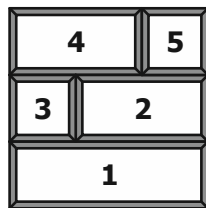
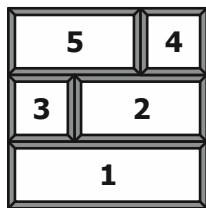
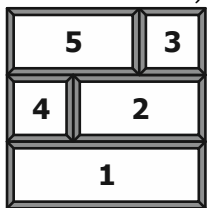


20 I BISCOTTI A FORMA DI ZUCCA [6300]

La posizione del numero 11 è obbligata, visto che il rettangolo superiore poggia su tutti gli altri rettangoli. Il resto dello schema è diviso in due parti simmetriche.

Valutiamo in quanti modi possiamo inserire i numeri da 1 a 5 in una di queste due parti.

Il numero 1 è obbligato. Il numero 2 ha due possibilità, una che porta ad una chiusura obbligata dello schema, l'altra che ha due alternative. Gli schemi possibili sono 5, di seguito riportati:



Scelti cinque numeri, cosa che si può fare in $\binom{10}{5}$ modi possibili, vi sono 5 configurazioni per organizzarli nello schema di sinistra e 5 per organizzare i numeri rimanenti nello schema di destra per un totale di $\binom{10}{5} \cdot 5 \cdot 5 = 6300$ modi possibili.