

SOLUZIONI V SFIDA mate**MARCHE**matica

1) Nel 340 a.C. Aristotele, nel *De Caelo*, sosteneva che la Terra non fosse un disco piano, bensì una sfera; il confine dell'Universo era la sfera delle stelle fisse, al di là della quale non fu mai chiarito cosa ci fosse. Immagina allora che il confine dell'universo sia un quadrato di lato 10 cm del metro intergalattico, dal quale, tagliando i quattro angoli, si ottiene un ottagono regolare. Quanto è lungo in centesimi di millimetro del metro intergalattico il lato dell'ottagono?

Soluzione: Indicata con x la lunghezza del lato dell'ottagono si deve avere: $x + 2\frac{x}{\sqrt{2}} = 10$, da cui $x = \frac{10}{1+\sqrt{2}} = 4,142 \text{ cm}$.

2) Nel 1924 l'astronomo americano Hubble dimostrò che la nostra galassia non era l'unica, ma che in realtà ne esistono molte, separate da estensioni immense di spazio vuoto. Per conoscere il numero di galassie scoperte nei primi 50 anni del Novecento, considera il numero $m = 999...99$ formato da 77 cifre tutte uguali a 9 e il numero $n = 777...77$ formato da 99 cifre tutte uguali a 7. Quant'è il numero delle cifre di $m \cdot n$?

Soluzione: Si ha $m \cdot n = n \cdot (m+1) - n = n \cdot 10^{77} - n$. Poiché il numero $m \cdot n$ si ottiene aggiungendo 77 zeri ad n esso ha $99+77=176$ cifre la prima delle quali è 7. Sottraendo n che ha un numero minore di cifre la prima cifra può al massimo diminuire di uno e quindi il numero di cifre non cambia.

3) Nel 1928 uno studente universitario indiano, Chandrasekhar, intuì che quando una stella si contrae, le particelle di materia si trovano molto vicine una all'altra, di conseguenza tendono ad allontanarsi una dall'altra facendo espandere la stella. Determina la velocità di espansione della stella GT162, sapendo che corrisponde al valore assoluto di $c(a+b)$, dove a, b, c sono le soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$ e $ab = 10$.

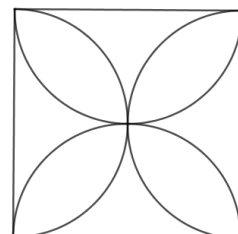
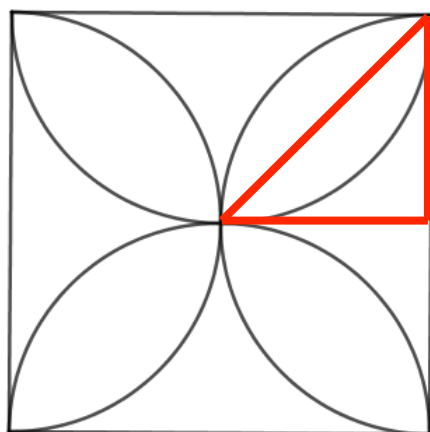
Soluzione: Sia $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$. Poiché $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$, si ha $abc = -40$. Poiché $ab=10$, si ha che $c = -4$. Inoltre $a+b+c=3$, da cui $a+b=7$ e $c(a+b) = (-4) \times 7 = -28$.

4) Einstein non accettò mai l'idea che l'Universo fosse governato dal caos, come previsto dalla meccanica quantistica. A tal proposito è molto famosa la sua frase "Dio non gioca a dadi"! Considerato un comune dado con le facce numerate da 1 a 6 e lo lanci tre volte, prendendo ogni volta un bastoncino di lunghezza pari al risultato del lancio, qual è la probabilità che i tre bastoncini costituiscano i lati di un triangolo rettangolo? Date come risultato il denominatore della frazione trovata ridotta ai minimi termini.

Soluzione: L'unico triangolo rettangolo che si possa costruire con lati di lunghezza intera compresi fra 1 e 6 ha i lati di lunghezza 3, 4 e 5. La probabilità che i lanci producano i tre risultati 3, 4 e 5 è: $\frac{3}{6}$ (probabilità che il primo lancio dia uno dei tre risultati), moltiplicato per $\frac{2}{6}$ (probabilità che il secondo dia uno degli altri due risultati) moltiplicato per $\frac{1}{6}$ (probabilità che il terzo lancio dia l'ultimo risultato). In totale la probabilità è quindi $\frac{1}{36}$.

5) E se il confine dell'Universo non fosse di forma quadrata? E se fosse un fiore? Trovare la misura dell'area del fiore di figura sapendo che il quadrato che lo contiene ha lato 20 cm del solito metro intergalattico. Restituire la parte intera del numero trovato.

Soluzione:



Consideriamo un quarto di circonferenza di lato 10 cm e togliamo il triangolo rettangolo di cateto 10 cm (disegnato in rosso in figura): abbiamo così l'ottava parte del fiore.

$$A = 8 \left[\frac{1}{4} (\pi \cdot 10^2) - \frac{1}{2} \cdot 10^2 \right] = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^2 (\pi - 2) = 200 \cdot 1,416 = 228,32$$

Quindi l'area sarà uguale a
La soluzione è quindi 228.

6) Anna e Beatrice sono rispettivamente il comandante e il vice-comandante della missione *BucoNero* e fanno parte di un equipaggio composto da sette membri totali. L'astronave su cui viaggiano ha la cabina di pilotaggio in cui sono presenti sette posti di guida messi in fila. Sapendo che Anna e Beatrice devono sedersi vicine mentre gli altri membri dell'equipaggio non hanno preferenze, in quanti modi si può disporre l'equipaggio in cabina di pilotaggio?

Soluzione: Consideriamo prima Anna e Beatrice come unica persona (considerato che si vogliono sedere vicine).

Quindi abbiamo 6! modi per disporre sei amiche in prima fila. Ora dobbiamo moltiplicare per 2 per permutare tra loro Anna e Beatrice. Quindi la soluzione è $6! \cdot 2 = 1440$.

7) Nel 1928 il fisico e Premio Nobel Born disse: "La fisica, quale la conosciamo, sarà completata in sei mesi". Purtroppo la sua previsione non fu giusta; infatti, ci vollero molti più mesi di quelli preventivati. Il numero di mesi minimo è dato dalla somma di tutti i numeri n di due cifre che, sommati al numero ottenuto scambiando le due cifre di n , danno un quadrato perfetto.

Soluzione: scriviamo gli n numeri come $10a + b$ e sommiamo il numero ottenuto scambiando le cifre cioè $10b + a$, si ottiene: $10a + b + 10b + a = 11 \cdot (a + b)$. Per essere un quadrato si dovrà avere $a + b = 11$. Osservando che a, b possono assumere tutti i valori tra 1 e 9 (no 0), si avranno i seguenti casi:

29
38
47
56
65
74
83
92

La somma di questi numeri è 484.

8) Nel 1609 Galilei, scrutando il cielo notturno con un telescopio, trovò una varietà di corpi celesti, orbitanti attorno a grandi pianeti. Egli stimò che i corpi osservati corrispondevano al massimo valore che può assumere il polinomio $P(x, y) = 71 - 4x^2 - y^2 + 20x - 4y$.

Soluzione: riscriviamo il polinomio nel seguente modo:

$$P(x, y) = 71 - 4x^2 - y^2 + 20x - 4y = -(4x^2 - 20x + 25) - (y^2 + 4y + 4) + 71 + 25 + 4 = \\ = -(2x + 5)^2 - (y + 2)^2 + 100$$

Questa espressione avrà come massimo valore 100 (quando i due quadrati saranno nulli).

9) Stefano, Alberto e Isacco stanno osservando le meraviglie dell'Universo elencate da Charles Messier nel suo famoso catalogo di oggetti celesti. Il catalogo di Messier consiste in un elenco numerato che va da 1 a 110. Ognuno dei tre amici ha scelto, senza comunicarlo agli altri, il proprio oggetto preferito. Si sa che, a priori, tutti gli oggetti hanno la stessa probabilità di essere scelti da ciascuno dei tre amici.

Qual è la probabilità che il numero dell'oggetto scelto da Stefano sia strettamente compreso tra i numeri degli oggetti scelti dagli altri due amici? S'indichi la somma tra il numeratore e il denominatore della frazione che esprime la probabilità ridotta ai minimi termini.

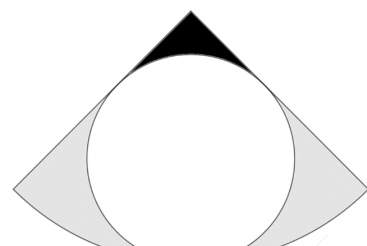
Soluzione: Per le ipotesi del problema, i casi possibili sono 110^3 . Tra queste terne, quelle in cui esiste uno dei tre numeri strettamente compreso tra gli altri due (vale a dire quelle in cui i numeri sono tutti diversi tra loro) sono

$110 \cdot 109 \cdot 108$. Per questioni di simmetria, in $\frac{1}{3}$ di queste il numero centrale sarà quello di Stefano.

$$\text{La probabilità richiesta è allora: } \frac{110 \cdot 109 \cdot 108}{110^3} = \frac{110 \cdot 109 \cdot 108}{3 \cdot 110^3} = \frac{109 \cdot 36}{110 \cdot 110} = \frac{109 \cdot 9}{55 \cdot 55} = \frac{981}{3025}$$

La soluzione è $981 + 3025 = 4006$.

10) L'astronave è in prossimità dell'orizzonte degli eventi del buco nero ed è a corto di energia. Si trova ormai a 2000 secondi luce dalla base spaziale ed è necessario organizzare la missione di soccorso. Nella base, sono a disposizione due scialuppe spaziali e il pilota umanoide più esperto. Ogni scialuppa può muoversi alla velocità di 40 secondi luce al giorno: il pilota può decidere di collegarle e farle muovere insieme o mettersi alla guida di una sola e lasciare l'altra parcheggiata in un punto dello spazio per riagganciarla e riprenderla successivamente. L'unica fonte di energia è data dalla batteria in dotazione a ogni scialuppa: ognuna di esse può accumulare fino a un massimo di 5000 GJ di energia che le due scialuppe si possono eventualmente scambiare. Ogni scialuppa consuma 28 GJ di energia al giorno quando è in movimento mentre 8 GJ di energia al giorno quando è ferma nello spazio. Il pilota consuma invece 2 GJ di energia al giorno. Sapendo che la missione di soccorso inizia con le due batterie al massimo della carica e si conclude col rientro alla base spaziale del pilota e delle due scialuppe di salvataggio, quanti GJ di energia potranno, al massimo, essere trasferiti all'astronave da soccorrere?



Soluzione: Il pilota partirà con le due scialuppe cariche con 5000 GJ di energia ciascuna e si muoverà verso l'astronave da soccorrere. In base ai dati del problema, il tempo necessario per giungere a destinazione sarà di $2000/40 = 50$ giorni. Naturalmente non è conveniente condurre entrambe le scialuppe fino all'astronave da soccorrere (il consumo da ferma è inferiore a quello in movimento) per cui la strategia che permette di massimizzare l'energia da trasferire all'astronave da soccorrere sarà la seguente:

- il pilota parte con entrambe le scialuppe e avanza verso l'astronave da soccorrere per t giorni;
- a questo punto, una delle due astronavi viene lasciata ferma nel punto dello spazio in cui si è giunti;
- il pilota e l'altra scialuppa continuano a muoversi verso la destinazione, trasferiscono una quantità x di energia e iniziano il viaggio di ritorno, in maniera simmetrica rispetto a quello di andata.

Affinché x sia massimo, è opportuno che la scialuppa che prosegue il viaggio da sola (insieme al pilota) inizi questa fase del viaggio con la batteria al massimo della carica. Chiamiamo A la scialuppa che giungerà a destinazione e B quella che dopo t giorni sarà parcheggiata.

La scialuppa A dovrà usare meno energia possibile, per cui i suoi 5000 GJ saranno utilizzati solo per la seconda parte del viaggio (andata e ritorno) per alimentare la scialuppa e il pilota: in questo modo la quantità x sarà la massima possibile. Tenendo conto sia dell'andata che del ritorno, la durata di questa fase del viaggio è di $2 \cdot (50 - t)$ giorni.

Moltiplicando per il consumo giornaliero della scialuppa e del pilota ($28+2=30$ GJ) si ottiene:

$$30 \cdot 2(50 - t) + x = 5000 \text{ da cui } x = 5000 - 3000 + 60t = 2000 + 60t.$$

L'energia della scialuppa B sarà invece utilizzata (interamente, in modo da ottenere il massimo valore per t e quindi anche per x) per alimentare le due scialuppe ed il pilota nei primi t giorni di viaggio (consumo giornaliero $28+28+2=58$ GJ moltiplicato per t giorni di andata e t di ritorno) e per il consumo della stessa scialuppa quando è ferma (8 GJ al giorno). Considerando che la scialuppa B resterà ferma per gli stessi $2 \cdot (50 - t)$ giorni considerati in precedenza,

possiamo quindi scrivere: $2 \cdot 58t + 8 \cdot 2(50 - t) = 5000$. Si può quindi ricavare il valore di t :

$$116t - 16t = 5000 - 800, 100t = 4200, t = 42 \text{ giorni.}$$

Sostituendo nella relazione che permette di ricavare x , si ha $x = 2000 + 60 \cdot 42 = 4520$.

Il massimo di energia che può essere trasferita all'astronave da soccorrere è quindi **4520 GJ**.

11) Dopo aver ricevuto i soccorsi, l'astronave è pronta per tornare alla base. Purtroppo il campo gravitazionale del buco nero ha deteriorato la superficie della sua parte anteriore che deve essere riverniciata. L'astronave ha la forma di un quadrante di circonferenza di raggio $20(\sqrt{30+20\sqrt{2}})$ m. All'interno è disegnata una circonferenza tangente internamente al quadrante. Determinare l'area (in m^2) della superficie da trattare con la vernice galattica, colorata in nero nella figura a lato.

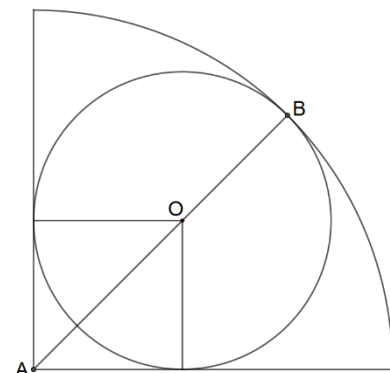
Soluzione: Chiamando $R=AB$ il raggio del quadrante e $r=OB$ quello della circonferenza tangente internamente, si può osservare che, essendo AO la diagonale di un quadrato di raggio r :

$$R = r + r\sqrt{2} = r(1 + \sqrt{2}). \text{ Elevando al quadrato si}$$

$$\text{ottiene } R^2 = r^2(1 + \sqrt{2})^2 \text{ e, sostituendo il valore di } R \text{ noto,}$$

$$20^2 \cdot (30 + 20\sqrt{2}) = r^2(1 + 2 + 2\sqrt{2}) \quad \text{da cui}$$

$$400 \cdot 10(3 + 2\sqrt{2}) = r^2(3 + 2\sqrt{2}) \text{ e, semplificando, } r^2 = 4000.$$



L'area da calcolare è data dalla differenza tra l'area del quadrato di lato r e un quadrante della circonferenza di raggio r :

$$r^2 - \frac{\pi r^2}{4} = \frac{1}{4} r^2 (4 - \pi). \text{ Sostituendo il valore di } r^2 \text{ determinato in precedenza, si trova che l'area cercata è pari a}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 4000(4 - \pi) = 1000(4 - \pi). \text{ Usando l'approssimazione fornita per } \pi \text{ e tralasciando le cifre decimali si}$$

ottiene il valore **0858**.

12) Il codice di accensione del motore a probabilità infinita dell'astronave è composto da tre numeri interi x, y, z da digitare nell'ordine. La combinazione corretta è però andata persa: si sa solo che x, y, z sono le tre soluzioni intere dell'equazione $p(t) = 0$, con $p(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ polinomio a coefficienti interi tali che $a + b + c = -9$.

Tra quante possibili combinazioni (x, y, z) bisognerà cercare quella corretta?

Soluzione: Indichiamo con x, y, z le soluzioni dell'equazione $t^3 + at^2 + bt + c = 0$. Considerando le relazioni tra le radici del polinomio e i suoi coefficienti (Formule di Viète), si ha:

$$x + y + z = -a \quad xy + xz + yz = b \quad xyz = -c$$

Essendo $a + b + c = -9$, otteniamo $(-x - y - z) + (xy + xz + yz) + (-xyz) = -9$. Cambiando di segno e sottraendo 1 ad entrambi i membri, la relazione diventa: $xyz - xy - xz - yz + x + y + z - 1 = 9 - 1$ che si può scrivere $(x-1)(y-1)(z-1) = 8$.

Si tratta dunque di trovare tutte le possibili terne ordinate di numeri interi (x', y', z') tali che $x'y'z' = 8$ (dalle quali poi si potrà ricavare il codice di accensione sommando 1 a ciascuno dei tre numeri).

Preliminarmente, osserviamo che:

- se la terna è composta da 3 numeri distinti, essi possono essere permutati in $3! = 6$ modi distinti;
- se la terna è composta da (esattamente) 2 numeri uguali tra loro, le permutazioni distinte sono 3;
- se la terna è composta da 3 numeri uguali, c'è (ovviamente) un'unica permutazione possibile.

Cerchiamo quindi tutte le terne diverse (a meno dell'ordine) e contiamone ciascuna in base al numero di permutazioni appena calcolato.

(1,1,8): 3 (-1, -1, 8): 3 (-1, 1, -8): 6
 (1,2,4):6 (-1,-2,4):6 (-1,2,-4):6 (1,-2,-4):6
 (2,2,2): 1 (-2,-2,2):3

In totale si hanno $3+3+6+6+6+6+1+3=0040$ combinazioni diverse.

13) Per i compagni universitari di Hawking un universo piatto era inteso come una griglia bidimensionale con i nodi che sono coppie ordinate di numeri interi; il buon Stephen, che aveva compreso benissimo come il termine "piatto" era relativo alla curvatura, solleva solleticarli con quesiti del tipo: trovare tutte le coppie ordinate (x, y) di numeri interi positivi che soddisfano l'equazione $xy = 2x + 2y + 139$. Dare come risposta la somma delle componenti di tutte le coppie trovate.

Soluzione: Scomponiamo l'equazione in questo modo $xy - 2x - 2y + 4 = 139 + 4$, da cui $(x-2)(y-2) = 143 = 11 \cdot 13 = 1 \cdot 143$ si hanno i seguenti quattro sistemi:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x-2=1 \\ y-2=143 \end{cases}, \begin{cases} x-2=11 \\ y-2=13 \end{cases}, \begin{cases} x-2=13 \\ y-2=11 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x-2=143 \\ y-2=1 \end{cases} \quad \text{cioè} \\ &\begin{cases} x=3 \\ y=145 \end{cases}, \begin{cases} x=13 \\ y=15 \end{cases}, \begin{cases} x=15 \\ y=13 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x=145 \\ y=3 \end{cases} \end{aligned}$$

La risposta è dunque $2 \cdot (3 + 145 + 13 + 15) = 352$.

14) L'universo è più semplice di quanto si possa pensare, in un'equazione polinomiale difficilmente si supera il quarto grado. Per risolvere un difficile problema di geodesia, gli astronomi hanno dovuto risolvere il seguente quesito: sia $p(x)$ un polinomio monico di quarto grado tale che: $p(0) = 30$, $p(\sqrt{6}) = 30 + \sqrt{6}$ e $p(-\sqrt{6}) = 30 - \sqrt{6}$; calcolare $p(1) + p(2) + p(3)$.

Soluzione: dalle tre condizioni si ha che $q(x) := p(x) - 30 - x$ si annulla in $0, \sqrt{6}, -\sqrt{6}$ ed è monico di quarto grado, quindi sarà $q(x) = x(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})(x - \alpha) = x(x^2 - 6)(x - \alpha)$ e $p(x) = q(x) + 30 + x$. Calcoliamo la somma: $q(1) = 1(1-6)(1-\alpha) = -5 + 5\alpha$, $q(2) = 2(4-6)(2-\alpha) = -8 + 4\alpha$, $q(3) = 3(9-6)(3-\alpha) = 27 - 9\alpha$, da cui $q(1) + q(2) + q(3) = 14$. Allora

$$p(1) + p(2) + p(3) = q(1) + 30 + 1 + q(2) + 30 + 2 + q(3) + 30 + 3 = 110.$$

15) Il grande amore del professor Hawking è l'universo nella sua interezza, come si è formata la vita in esso e tutto quanto gli consegue. Nelle notti estive soleva sdraiarsi in un prato e contemplare le stelle. Una volta vide due stelle e due satelliti in movimento che descrivevano un trapezio di forma variabile; si ricordò allora del seguente problema di geometria che incontrò durante i suoi studi liceali: tra tutti i trapezi di area 882 trovare quello che ha la diagonale maggiore minima. Dare come risposta la lunghezza di tale diagonale.

Soluzione: se prendiamo due trapezi con le stesse basi e la stessa altezza è chiaro che quello con diagonale maggiore minima sarà un trapezio isoscele. Supponiamo dunque di avere un trapezio isoscele con base maggiore a , base minore b , altezza h e diagonali d . Ora l'area sarà: $A = \frac{(a+b)h}{2} = 882$, e l'altezza $h = \frac{2A}{a+b}$; cerchiamo la diagonale:

$$d = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2} + b\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{2A}{a+b}\right)^2}$$

posto $c = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, cerchiamo il valore minimo di d^2 : per la disuguaglianza tra media aritmetica e media

geometrica (AM-GM) si ha $d^2 = c + \frac{A^2}{c} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{A^2}{c}} = 2A$; quindi sarà

$$d_{\minimo} = \sqrt{2A} = \sqrt{2 \cdot 882} = 42.$$

16) Nella sala di controllo dell'Osservatorio Astronomico Reale di Greenwich c'è un computer il cui monitor è suddiviso in 20 sottoschermate non tutte simultaneamente operative. Al giovane Stephen, in visita scolastica quando era uno speranzoso liceale, venne in mente il seguente quesito di combinatoria: in quanti modi possiamo inserire 5 oggetti indistinguibili in una griglia 4x5 (4 righe e 5 colonne) in maniera tale che su ogni riga e su ogni colonna non ci siano più di 2 oggetti?

Soluzione: ragioniamo sulle righe, distinguiamo due casi:

- i. due righe presentano 2 oggetti ciascuna ed una terza riga 1 solo. Possiamo selezionare le due righe con 2

oggetti in $\binom{4}{2} = 6$ modi e la riga con 1 oggetto in $\binom{2}{1} = 2$ modi. I 2 oggetti nella prima riga avente 2

oggetti possono essere scelti in $\binom{5}{2} = 10$ modi differenti, abbiamo i tre sottocasi:

1. la seconda riga avente 2 oggetti ricopia esattamente la prima riga avente 2 oggetti: l'ultimo oggetto può

occupare $\binom{3}{1} = 3$ posizioni diverse (evidenziate in giallo nella figura sottostante)

X	X			
X	X			
		X		

in totale avremo $\binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{5}{2} \binom{1}{1} \binom{3}{1} = 6 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 3 = 360$ configurazioni possibili (le due righe

doppie (cioè le righe con 2 oggetti), la riga singola (cioè la riga con 1 oggetto), le combinazioni nella prima riga doppia, le combinazioni nella seconda riga doppia, le combinazioni nella riga singola).

2. nelle 2 righe con 2 oggetti ciascuna solo una coppia di oggetti si trova incolonnata; l'ultimo oggetto può

occupare $\binom{4}{1} = 4$ posizioni diverse (evidenziate in giallo nella figura sottostante)

X	X			
X		X		
	X			

in totale avremo $\binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{5}{2} \left[\binom{2}{1} \binom{3}{1} \right] \binom{4}{1} = 6 \cdot 2 \cdot 10 \cdot [2 \cdot 3] \cdot 4 = 2880$ configurazioni possibili

(le due righe doppie, la riga singola, le combinazioni nella prima riga doppia, le combinazioni nella seconda riga doppia, le combinazioni nella riga singola).

3. nelle 2 righe con 2 oggetti ciascuna nessuna coppia di oggetti si trova incolonnata; l'ultimo oggetto può

occupare $\binom{5}{1} = 5$ posizioni diverse (evidenziate in giallo nella figura sottostante)

X	X			
		X	X	
X				

in totale avremo $\binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{5}{1} = 6 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 5 = 1800$ configurazioni possibili (le due righe doppie, la riga singola, le combinazioni nella prima riga doppia, le combinazioni nella seconda riga doppia, le combinazioni nella riga singola).

- ii. una riga presenta 2 oggetti e le altre tre righe presentano un oggetto ciascuna. Possiamo selezionare la riga con 2 oggetti in $\binom{4}{1} = 4$ modi. I 2 oggetti nella riga avente 2 oggetti possono essere scelti in $\binom{5}{2} = 10$ modi differenti, abbiamo i due sottocasi:

1. nella prima riga singola l'oggetto è incolonnato con un oggetto della riga doppia, nella seconda riga singola (in figura la III riga) abbiamo segnato, per ciascuna posizione, quante possibilità abbiamo nella terza riga singola (la IV in figura); si sommano poi i numeri:

X	X			
X				
	3	4	4	4

in totale avremo $\binom{4}{1} \binom{5}{2} \binom{2}{1} (3 + 4 + 4 + 4) = 4 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 15 = 1200$ configurazioni possibili (la riga doppia, le combinazioni nella riga doppia, le combinazioni nella prima riga singola, la seconda riga singola con le combinazioni nella terza riga singola).

2. nella prima riga singola l'oggetto non è incolonnato con un oggetto della riga doppia, nella seconda riga singola (in figura la III riga) abbiamo segnato, per ciascuna posizione, quante possibilità abbiamo nella terza riga singola (la IV in figura); si sommano poi i numeri:

X	X			
		X		
4	4	4	5	5

in totale avremo $\binom{4}{1} \binom{5}{2} \binom{3}{1} (4 + 4 + 4 + 5 + 5) = 4 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 22 = 2640$ configurazioni possibili (la riga doppia, le combinazioni nella riga doppia, le combinazioni nella prima riga singola, la seconda riga singola con le combinazioni nella terza riga singola).

In totale: $360 + 2880 + 1800 + 1200 + 2640 = 8880$.

17) Una delle grandi incognite della fisica quantistica è calcolare il numero di particelle conosciute. Se $q(x)$ è il polinomio monico di terzo grado le cui radici sono i quadrati delle radici di $p(x) = x^3 + 2x^2 - 1$, il numero delle particelle note fino al 1962 corrisponde a $q(12)$.

Soluzione: α radice di $p(x) \Leftrightarrow \alpha^3 = -2\alpha^2 + 1$ (A)

Moltiplicando ambo i membri per α si ha: $\alpha^4 = -2\alpha^3 + \alpha = -2(-2\alpha^2 + 1) + \alpha$

da cui $\alpha^4 = 4\alpha^2 + \alpha - 2$ (B)

Moltiplicando ambo i membri per α si ha: $\alpha^5 = 4\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha = 4(-2\alpha^2 + 1) + \alpha^2 - 2\alpha$

da cui $\alpha^5 = -7\alpha^2 - 2\alpha + 4$ (C)

Moltiplicando ambo i membri per α si ha: $\alpha^6 = -7\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha = -7(-2\alpha^2 + 1) - 2\alpha^2 + 4\alpha$

da cui $\alpha^6 = 12\alpha^2 + 4\alpha - 7$ (D)

Sommando membro a membro la (D) e la (B) moltiplicata per -4 si ha $\alpha^6 - 4\alpha^4 + 4\alpha^2 - 1 = 0$.

Possiamo pertanto concludere che ogni radice α di $p(x)$ è tale che α^2 è radice di $q(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ da cui $q(12) = 1199$.

18) Nel 1865 il fisico britannico Maxwell riuscì a unificare le teorie dell'elettricità e del magnetismo, fondando la teoria nota col nome di *elettromagnetismo*, descritta dalle quattro famose equazioni di Maxwell; secondo tale teoria le onde si propagano a una velocità costante. Per dimostrare quanto vale tale velocità, si dovette calcolare la somma $2 + 12 + 30 + 56 + \dots + (2^{23} - 1)2^{23}$ [Si può anche scrivere direttamente $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 + \dots + (2^{23} - 1)2^{23}$]. Trovare le quattro cifre meno significative di tale somma.

Soluzione: $2 + 12 + 30 + 56 + \dots + (2^{23} - 1)2^{23} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2^{23} - 1)2^{23} =$
 $= 2 [1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + \dots + (2^{23} - 1)2^{22}] = S$

Posto $N = 2^{22}$,

$S = 2 \sum_{i=1}^N (2i - 1)i = 2 [\sum_{i=1}^N 2i^2 - \sum_{i=1}^N i] = 4 \sum_{i=1}^N i^2 - 2 \sum_{i=1}^N i =$
 $\frac{2N^3 + 3N^2 + N}{3} - \frac{N(N+1)}{2} = \frac{4N^3 - N^2 - N}{6}$

Per rispondere al quesito si tratta di trovare $[S]_{10000} = \frac{1}{3} [N]_{10000} [N+1]_{10000} [4N-1]_{10000}$.

Sostituendo $N = 2^{22}$ si ha $[S]_{10000} = \frac{1}{3} [2^{22}]_{10000} [2^{22}+1]_{10000} [4 \cdot 2^{22}-1]_{10000}$.

$$\begin{aligned}
 [2^{22}]_{10000} &= [2^{10}]_{10000} \cdot [2^{10}]_{10000} \cdot [2^2]_{10000} = [1024]_{10000} \cdot [1024]_{10000} \cdot [4]_{10000} = \\
 &= [8576]_{10000} \cdot [4]_{10000} = [4304]_{10000} \\
 [2^{22}+1]_{10000} &= [4305]_{10000} \\
 [4 \cdot 2^{22}-1]_{10000} &= 4[2^{22}]_{10000} - [1]_{10000} = 4[4304]_{10000} - [1]_{10000} = [7216]_{10000} - [1]_{10000} = [7215]_{10000} \\
 [S]_{10000} &= \frac{1}{3} [4304]_{10000} [4305]_{10000} [7215]_{10000} = \frac{1}{3} [8720]_{10000} [7215]_{10000} = \\
 &= \frac{1}{3} [4800]_{10000} = [1600]_{10000}
 \end{aligned}$$

Osservazione: Dal momento che sto ragionando mod 10000, ho eseguito le moltiplicazioni considerando solo le cifre da quelle unità a quelle delle migliaia. Riporto il modo in cui ho eseguito i calcoli a scopo esemplificativo.

1024x	8576x	4304 x	4304 x	8720 x
1024=	4=	4 =	4304 =	7215 =
-----	-----	-----	-----	-----
4096	...4304	...7216	...1520	...3600
...048			...000	...720
...00			...12	...40
...4			...6	...0
-----			-----	-----
...8576			...8720	...4800

19) Il motore a fusione nucleare dell'astronave progettata da Dr Quantum è un po' particolare: ci sono 3 aste verticali, su cui devono essere inseriti dei dischi di iperuranio del peso di 500 g l'uno. Le aste sono contrassegnate con i numeri 1, 2, e 3. Su ogni asta deve essere inserito un numero di dischi almeno pari al numero indicato sull'asta. Le aste di numero dispari possono sopportare al massimo un peso in kg pari al doppio del numero che le contraddistingue. Ci sono a disposizione 20 dischi indistinguibili fra loro. Qual è la probabilità che, rispettando le condizioni precedenti, l'astronave riesca a partire mettendo esattamente 5 dischi sull'asta 3? Dare come risultato la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

Soluzione: L'asta 1 può sopportare un peso massimo di 2 kg e quindi può contenere al massimo 4 dischi.

L'asta 3 può sopportare un peso massimo di 6 kg e quindi può contenere al massimo 12 dischi.

Indicando con x, y e z il numero di dischi sulle aste 1, 2 e 3 rispettivamente, e con t il numero di dischi non collocati, si ha:

$$x + y + z + t = 20 \quad \text{con} \quad 1 \leq x \leq 4, \quad y \geq 2, \quad 3 \leq z \leq 12.$$

Andiamo a calcolare il numero dei casi possibili. Considerando le limitazioni su x,y,z possiamo considerare :

$$x' + y' + z' + t' = 14 \quad \text{con} \quad 0 \leq x' \leq 3, \quad 0 \leq z' \leq 9.$$

Se $x' = 0, y', z', t'$ tali che $y' + z' + t' = 14$ possono essere scelti in $\frac{16!}{14!2!} = 120$ modi, se non si fanno limitazioni sulla z.

Consideriamo ora $y' + z' + t' = 14$ con $z' \geq 10$ e quindi $y'' + z'' + t'' = 4$. Le soluzioni di quest'ultima equazione possono essere scelte in $\frac{6!}{4!2!} = 15$ modi.

Pertanto ci sono $120 - 15 = 105$ casi in cui $x + y + z + t = 20$ con $x = 1, y \geq 2$ e $3 \leq z \leq 12$.

Se $x' = 1, y', z', t'$ tali che $y' + z' + t' = 13$ possono essere scelti in $\frac{15!}{13!2!} = 105$ modi, se non si fanno limitazioni sulla z.

Consideriamo ora $y' + z' + t' = 13$ con $z' \geq 10$ e quindi $y'' + z'' + t'' = 3$. Le soluzioni di quest'ultima equazione possono essere scelte in $\frac{5!}{3!2!} = 10$ modi.

Pertanto ci sono $105 - 10 = 95$ casi in cui $x + y + z + t = 20$ con $x = 2, y \geq 2$ e $3 \leq z \leq 12$.

Se $x' = 2, y', z', t'$ tali che $y' + z' + t' = 12$ possono essere scelti in $\frac{14!}{12!2!} = 91$ modi, se non si fanno limitazioni sulla z.

Consideriamo ora $y' + z' + t' = 12$ con $z' \geq 10$ e quindi $y'' + z'' + t'' = 2$. Le soluzioni di quest'ultima equazione possono essere scelte in $\frac{4!}{2!2!} = 6$ modi.

Pertanto ci sono $91 - 6 = 85$ casi in cui $x + y + z + t = 20$ con $x = 3, y \geq 2$ e $3 \leq z \leq 12$.

Se $x' = 3, y', z', t'$ tali che $y' + z' + t' = 11$ possono essere scelti in $\frac{13!}{11!2!} = 78$ modi, se non si fanno limitazioni sulla z.

Consideriamo ora $y' + z' + t' = 11$ con $z' \geq 10$ e quindi $y'' + z'' + t'' = 1$. Le soluzioni di quest'ultima equazione possono essere scelte in $\frac{3!}{2!} = 3$ modi.

Pertanto ci sono $78 - 3 = 75$ casi in cui $x + y + z + t = 20$ con $x = 4, y \geq 2$ e $3 \leq z \leq 12$.

Quindi i casi possibili sono $105 + 95 + 85 + 75 = 360$.

I casi favorevoli sono quelli in cui $z = 5 \Rightarrow x + y + t = 15 \quad \text{con} \quad 1 \leq x \leq 4, \quad y \geq 2$.

Consideriamo $x' + y' + t' = 12$. Le soluzioni di quest'ultima equazione possono essere scelte in $\frac{14!}{12!2!} = 91$ modi.

Consideriamo ora $x' + y' + t' = 12$ con $x' \geq 4$ e quindi $x'' + y'' + t'' = 8$. Le soluzioni di quest'ultima equazione possono essere scelte in $\frac{10!}{8!2!} = 45$ modi. Pertanto ci sono $91 - 45 = 46$ casi favorevoli.

La probabilità cercata è dunque $\frac{46}{360} = \frac{23}{180}$ e la risposta al quesito è $23 + 180 = 203$.

20) I buchi neri non rotanti sono molto semplici, perfettamente sferici e di dimensioni dipendenti solo dalla massa. Un

ortogonali passanti per il centro O della sfera e siano A e B i punti di intersezione di α , β e S. Si considerino ora due coni retti di diametri di base AO e OB rispettivamente, con la base sul piano β , tali che i loro vertici, rispettivamente C e D, appartengano a S e si trovino in semipiani opposti rispetto a b. Siano γ e δ i due piani tangenti a S in A e B rispettivamente. Sia r la retta intersezione fra α e γ e sia s la retta intersezione fra α e δ . Si considerino un punto G su r e un punto F su s tali che G si trovi dalla stessa parte di C rispetto a β e F si trovi dalla stessa parte di D rispetto a β . Siano poi $GC \cong DF$ e $AG > BF$. Prolungando AG dalla parte di G di un segmento $GG' \cong AG$ e prolungando BF dalla parte di F di un segmento $FF' \cong BF$, determinare la distanza fra G' e F' esprimendo il risultato in dm del metro intergalattico. Moltiplicando per π tale distanza, si ottiene la massa di S.

Soluzione: Consideriamo l'intersezione di sfera, piani e coni con il piano α (fig.2). $C \in S$ pertanto $\overline{CO} = \overline{AO}$. Dal momento che il cono è retto, il piede dell'altezza cade nel punto medio di AO quindi il triangolo CAO è isoscele sulla base AB e pertanto, essendo $\overline{CO} = \overline{AO}$, è equilatero. Si tratta dunque di un cono equilatero, e altrettanto vale per l'altro cono di diametro OB. γ è tangente alla sfera in A quindi r è tangente in A alla circonferenza intersezione di α ed S. Analogamente δ è tangente alla sfera in B quindi s è tangente in B alla circonferenza intersezione di α ed S. Dal momento che i due coni sono equilateri, $\widehat{CAO} = \widehat{DBO} = 60^\circ$ da cui $\widehat{CAG} = \widehat{DBF} = 30^\circ$. I due triangoli CAG e DBF hanno $CA \cong BD$, $CG \cong DF$ e $\widehat{CAG} \cong \widehat{DBF}$, non sono però congruenti essendo $\overline{AG} = \overline{BF} + 2$. Per il teorema dei due lati e dell'angolo non compreso i due triangoli si possono "incollare esternamente" in modo che C si sovrapponga a D e G vada a coincidere con F. (vedi fig.4). Così facendo si ottiene un triangolo isoscele di base $AG + BF$, lato obliquo $AC = r$ e angolo alla base di 30° . La base misura dunque $2r \cos 30^\circ = r\sqrt{3}$. (si poteva equivalentemente raggiungere lo stesso risultato applicando il teorema dei seni). Essendo $\overline{AG} + \overline{BF} = r\sqrt{3}$, $\overline{AG'} = 2\overline{AG}$ e $\overline{BF'} = 2\overline{BF}$, quindi $\overline{AG'} + \overline{BF'} = 2r\sqrt{3}$. Pertanto $\overline{FF'} = \sqrt{(\overline{AG'} + \overline{BF'})^2 + (\overline{AB})^2} = \sqrt{12r^2 + 4r^2} = 4r$.

Da cui, essendo $r = 5046$ cm, $\overline{FF'} = 20184$ cm = 2018,4 dm.

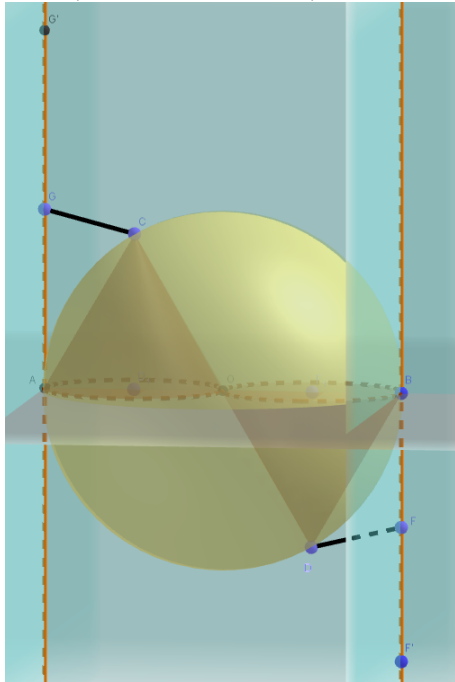


fig 1

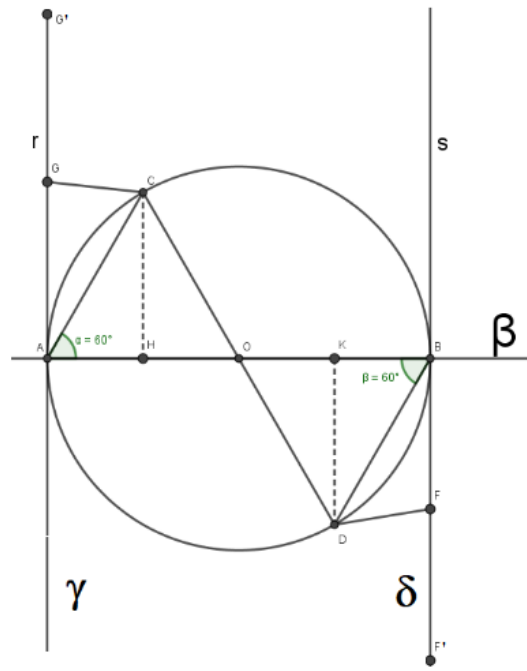


fig 2

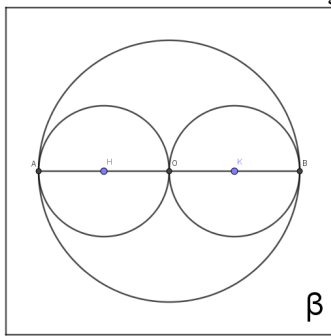


fig 3

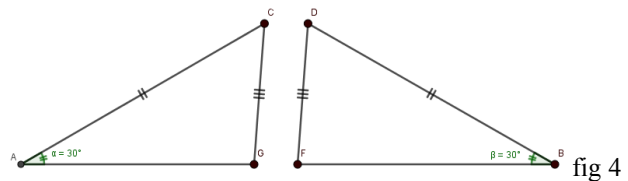


fig 4