

**SOLUZIONI I ALLENAMENTO REGIONALE TEMATICO
DI VENERDÌ 23 NOVEMBRE 2018**

Quesito 1

Quanti sono i rettangoli con i lati che misurano numeri interi e che hanno area 486000? Due rettangoli sono da considerarsi uguali se hanno gli stessi lati.

Soluzione:

Fattorizzando 486000 si ottiene $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3$ che ha esattamente $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$ divisori. Questi si presentano a coppie tali che il loro prodotto sia 486000. Ogni coppia è un rettangolo. Quindi ci sono 60 rettangoli in tutto.

Quesito 2

Determinare la somma dei tre numeri più piccoli che hanno esattamente 15 divisori.

Soluzione:

Per ottenere 15 divisori il numero potrà essere del tipo p^{14} oppure $p^2 q^4$.

Cerchiamo i numeri più piccoli prendendo per p e q i numeri primi più piccoli.

Si ottiene:

$$2^{14} = 16384$$

$$2^2 \cdot 3^4 = 324$$

$$3^2 \cdot 2^4 = 144$$

$$2^4 \cdot 5^2 = 400$$

Quindi la somma dei tre numeri più piccoli è 868

Quesito 3

Il prodotto tra due numeri a e b vale 111375. Il loro minimo comune multiplo che valore minimo può avere?

Soluzione:

Fattorizzando 111375 si ottiene $3^4 \cdot 5^3 \cdot 11$

Ricordando che $a \cdot b = MDC(a, b) \cdot mcm(a, b)$, per avere il minimo $mcm(a, b)$ si può procedere nel seguente modo:

$$MCD(a, b) = 3^2 \cdot 5$$

$$mcm(a, b) = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$$

Quindi il più piccolo minimo comune multiplo è 2475

Quesito 4

Si supponga che $n \geq 100!$. Trova il più piccolo n tale che nessuno tra $n, n+1, n+2, \dots, n+99$ sia primo e dai come risultato la somma dei 100 numeri consecutivi trovati modulo 100.

Soluzione

basta considerare $101! + 2, 101! + 3, 101! + 4, \dots, 101! + 101$ (che sono tutti numeri composti perché il primo è divisibile per 2, il secondo per 3, il quarto per 4, ecc.).

Quindi la loro somma modulo 100 vale:

$$(101! + 2 + 101! + 3 + \dots + 101! + 100 + 101! + 101) \bmod 100 =$$

$$(2 + 3 + \dots + 99 + 0 + 1) \bmod 100 = \frac{99 \cdot 100}{2} \bmod 100 = 50$$

Quesito 5

Una slot machine funziona in questo modo. Ogni partita costa 14 monete e bisogna pagarle in anticipo. Facendo girare la ruota vengono selezionati due numeri interi da 1 a 500. Se il modulo della differenza fra i quadrati dei due numeri estratti è un quadrato perfetto n^2 si vince un numero n di monete, in caso contrario si perde. Andrea inizia a giocare avendo in tasca esattamente 14 monete. Dopo aver eventualmente incassato i soldi dell'ultima vittoria, quando smette di giocare ha esattamente M monete. Nelle varie partite non sono mai uscite le stesse coppie di numeri tranne in un caso e, nei casi di vincita, i due numeri estratti sono sempre stati consecutivi. Qual è il massimo valore di M ?

SOLUZIONE DELLA VARIANTE

Perché M sia massimo dobbiamo pensare di non perdere mai e di vincere ogni volta un numero m di monete superiore al costo della partita.

Siano x e y i due numeri estratti. In caso di vittoria $x^2 - y^2 = n^2$, con x,y,n, interi e $x = y + 1$. Pertanto $y^2 + 2y + 1 - y^2 = n^2$ da cui $n^2 = 2y + 1$. Da ciò si ha che n è dispari da cui $n = 2k + 1$ quindi $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Da ciò si ha $y = 2k^2 + 2k$ e $x = 2k^2 + 2k + 1$. Essendo x e y due numeri consecutivi compresi fra 1 e 500 ed essendo $x > y$ deve essere $1 \leq y \leq 499 \Rightarrow 1 \leq 2k^2 + 2k \leq 499 \Rightarrow 2 \leq 4k^2 + 4k \leq 998 \Rightarrow 3 \leq 4k^2 + 4k + 1 \leq 999 \Rightarrow 3 \leq (2k + 1)^2 \leq 999 \Rightarrow [\sqrt{3}] \leq 2k + 1 \leq [\sqrt{999}] \Rightarrow 2 \leq 2k + 1 \leq 31$. Ma $2k + 1 = n$ quindi il numero delle partite vinte in una partita deve essere un numero dispari compreso fra 2 e 31 ma al tempo stesso, affinché M sia massimo, il guadagno m in ogni partita, dato dalla differenza fra il ricavo n e la spesa di 14 monete, deve essere positivo, pertanto, ricordando che una volta una coppia è uscita due volte, il valore di m cercato è $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = (17+1) \cdot 9 : 2 = 98$.

Quesito 6

Quante sono le coppie ordinate del tipo (m,n) tali che m ed n siano divisori interi positivi di 337500 ed m sia divisore di n?

SOLUZIONE

n, divisore di $337500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$, è della forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^g$ con $a = 0, 1, 2$; $b = 0, 1, 2, 3$; $g = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Se l'esponente di 2 nella fattorizzazione di n è 0 il numero dei divisori di n, e quindi dei possibili valori di m, è $d_0(n) = \sum_{\beta=0}^3 (\beta + 1)(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = (1+2+3+4)(1+2+3+4+5+6)$. Se l'esponente di n nella fattorizzazione di n è 1 il numero dei divisori di n, e quindi dei possibili valori di m, è $d_1(n) = 2 \sum_{\beta=0}^3 (\beta + 1)(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 2(1+2+3+4)(1+2+3+4+5+6)$. Se l'esponente di n nella fattorizzazione di n è 2 il numero dei divisori di n, e quindi dei possibili valori di m, è $d_2(n) = 3 \sum_{\beta=0}^3 (\beta + 1)(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3(1+2+3+4)(1+2+3+4+5+6)$. Pertanto, al variare di a, b, g, i possibili valori di m, e quindi delle coppie ordinate richieste è $d_0(n) + d_1(n) + d_2(n) = (1+2+3)(1+2+3+4)(1+2+3+4+5+6) = 1260$.

Quesito 7

Determinare la somma dei volumi dei parallelepipedi di dimensioni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che la quarta potenza di ognuna delle tre dimensioni sia uguale alla somma delle altre due dimensioni. (Si consideri che tre le misure sono espresse in metri e i volumi in metri cubi).

SOLUZIONE

$$\begin{cases} x^4 = y + z \\ y^4 = x + z \\ z^4 = y + x \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda dalla prima si ha $y^4 - x^4 = x - y$ da cui $(x - y)[1 + (x + y)(x^2 + y^2)] = 0$. Dal momento che $x + y > 0$ (x, y, z sono le dimensioni di un parallelepipedo), la quantità fra parentesi quadre non può essere zero quindi $x = y$. Procedendo in modo analogo con la seconda e la terza equazione si ha $y = z$ da cui $x = y = z$. Sostituendo nella prima equazione si ha $x^4 = 2x$ da cui $x = \sqrt[3]{2}$ pertanto c'è un solo parallelepipedo le cui misure soddisfano la richiesta del problema e la risposta è $xyz = 2$.

Quesito 8

I primi termini di successione sono: 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 1, 2, Qual è il 2018 termine?

SOLUZIONE

Scriviamo i termini della successione per righe nel modo seguente: prima riga: 1; seconda riga: 1,2,2; terza riga 1,2,2,3,3,3; quarta riga 1,2,2,3,3,3,4,4,4; ... La i-esima riga contiene T_i termini, con T_i i-esimo numero triangolare. $\sum_{i=1}^n T_i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Il 2018-esimo termine della successione è l'ultimo della n-esima riga se esiste n tale che $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 2018$ altrimenti si trova invece nella

riga (n+1)-esima, dove n è il più grande numero naturale tale che $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} < 2018$. $n^3 < n(n+1)(n+2) < 2^2 \cdot 3 \cdot 1009 < 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 = 24^3$ pertanto si tratta di trovare il più grande valore di $n < 24$ tale che $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} < 2018$ da cui si ha $n=21$. Il 2018-esimo termine della successione si trova dunque nella 22-esima riga nella quale ci sono $T_{22} = \frac{22 \cdot 23}{2} = 253$ termini. $2018 - \sum_{i=1}^{21} T_i = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23}{6} = 2018 - 1771 = 247$ quindi il termine cercato è 22.

Quesito 9

In farmacia vi è una credenza piena di bottigliette di varia capacità. Su uno dei ripiani della credenza sono disposte in fila cinque bottigliette, delle quali la prima da sinistra ha una capacità di 15 decilitri e l'ultima di 150 decilitri. Sapendo che la somma delle capacità delle prime tre bottigliette (da sinistra) è di 90 decilitri, delle tre centrali è di 200 decilitri e delle ultime tre è di 310 decilitri, quanti decilitri è capiente la bottiglietta di mezzo?

Soluzione Il problema si può risolvere con varie tecniche. Ad esempio: dalla somma delle ultime 3 (310) togliamo il valore dell'ultima bottiglietta (150) e rimane così la somma della terza e della quarta bottiglietta (160). Se dalla somma delle tre bottigliette centrali (200) togliamo ora il valore della somma della terza e della quarta bottiglietta (160) resta solo la seconda bottiglietta (40). Conoscendo ora la somma delle prime tre bottigliette (90) si possono sottrarre i valori della prima (15) e della seconda (40) e ottenere così il valore della bottiglietta centrale cercata (35).

Quesito 10

Ad una fiera si pescano palline di vari colori: il punteggio che è assegnato da una pallina è lo stesso per tutte le palline che hanno lo stesso colore. Una pallina blu assegna più punti di una pallina rossa; cinque palline blu e due palline rosse danno in totale 34 punti. Quanti punti danno in totale due palline blu e cinque palline rosse?

Soluzione Deve essere verificata questa condizione: $5B + 2R = 34$ Avendo come unica altra condizione che $B > R$. Si procede per tentativi in modo da determinare quanto possono valere B ed R. Si può osservare che sicuramente B deve essere pari, in quanto $2R$ è sicuramente pari, e per ottenere un altro numero pari (34) occorre che anche il primo addendo sia pari! $B = 2$ $R = 1$ NO. $B = 4$ $R = 3$ (o numero minore) NO. $B = 6$ $R = 2$ OK. Avendo determinato il valore di B ed R è ora possibile rispondere alla richiesta: $2B + 5R = 12 + 10 = 22$.

Quesito 11

Un bagnino deve riempire una sabbiera con esattamente 13 chili di sabbia. Ha a disposizione soltanto un secchio da 7 chili e uno da 11. Qual è il minimo numero di travasi che deve fare?

Soluzione Si deve risolvere l'equazione diofantea $7x + 11y = 13$. Utilizzando il metodo dei resti si ottiene la soluzione particolare $x = -39$ $y = 26$ da cui si ottiene la soluzione generale $x = -39 + 11k$ e $y = 26 - 7k$. Il minimo numero di travasi lo si ottiene per $k=4$ da cui $x=5$ e $y=-2$. Dovrà quindi riempire 5 volte il secchio da 7 e togliere 2 volte la sabbia con il secchio da 11. Totale 7 travasi.

Quesito 12

Scriviamo in ordine crescente tutti i numeri interi positivi che non sono né multipli di 2 né multipli di 3. Quale numero si trova in 2019-esima posizione?

Soluzione Si scrivono 2 numeri ogni 6 quindi $2018 \text{ per } 3$ mi dà esattamente 6054. Ciò significa che fino a 6054 ci sono 2018 numeri con le caratteristiche richieste. Il 2019-esimo sarà quindi 6055 dà resto 1 nella divisione per 6.

Quesito 13

Quante cifre ha il più piccolo numero intero positivo che sia divisibile per 25 e tale che la somma delle sue cifre sia divisibile per 2018?

Soluzione: essendo tale numero divisibile per 25 deve terminare con 00, 25, 50 o 75, scegliamo quest'ultimo che realizza la somma più alta (delle cifre); poi avrà tanti 9 fino ad arrivare alla somma di 2018 o poco meno, quello che avanza lo inseriamo all'inizio: 899...9975 con 222 cifre 9 consecutive; infatti si ha: $8 + 9 \times 222 + 7 + 5 = 2018$. Quindi le cifre in totale sono $1 + 222 + 1 + 1 = 225$

Quesito 14

Che numero si ottiene dividendo $2^{2018} - 2^{2017} + 2^{2016} - 2^{2015} + \dots + 2^{2002} - 2^{2001}$ per 2^{2000} ? Dare come risposta le 4 cifre più significative del numero (quelle più a sinistra).

Soluzione: nella somma, raccogliendo parzialmente gli addendi a coppie, si ottiene:
 $2^{2017}(2-1) + 2^{2015}(2-1) + \dots + 2^{2003}(2-1) + 2^{2001}(2-1)$, raccogliamo poi 2^{2001} :
 $2^{2001}(2^{16} + 2^{14} + \dots + 2^2 + 1)$; dividendo per 2^{2000} e risistemando le basi delle potenze nel secondo

fattore: $2 \cdot (4^8 + 4^7 + \dots + 4^1 + 1) = 2 \cdot \frac{4^9 - 1}{4 - 1} = 174762$. La risposta è quindi 1747.

Quesito 15

Prendiamo tutti i numeri dispari tra 1 e 2018 che non siano multipli né di 3 né di 5, sia S la loro somma e P il loro prodotto; si dia come risposta il prodotto tra la cifra delle unità di S e la cifra delle unità di P.

Soluzione: dividiamo i numeri che ci interessano in gruppi: tra i primi 30 naturali vanno bene solo 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29; in tutte le successive serie di 30 numeri naturali consecutivi vi saranno sempre 8 numeri che termineranno con le stesse cifre (per esempio nella seconda serie, i numeri da 31 a 60, sono 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53 e 59) fino all'ultima serie di 30 numeri che è quella che va da 1981 a 2010. Per tutte queste serie la somma delle cifre delle unità è $1+7+1+3+7+9+3+9=..0$, il prodotto è $1 \times 7 \times 1 \times 3 \times 7 \times 9 \times 3 \times 9 = ..1$. Rimangono quindi i numeri 2011 e 2017. Quindi avremo $S=0+\dots+0+1+7=8$ e $P=1 \times \dots \times 1 \times 1 \times 7=7$. La risposta è quindi $P \times S = 7 \times 8 = 56$.

Quesito 16

Sia $N = 99\dots99$ l'intero costituito da 2018 cifre 9 consecutive. Quante cifre 9 contiene il numero N^3 ?

Soluzione: $N^3 = (9\dots9)^3 = (10^{2018} - 1)^3 = (10^{2018})^3 - 3 \cdot (10^{2018})^2 + 3 \cdot 10^{2018} - 1$.

Separiamo le cifre a blocchi di 2018 e facciamo la somma in colonna:

1	00...00	00...00	00...00	-
	3	00...00	00...00	+
		3	00...00	-
			1	=
	99...97	00...02	99...99	

Quindi avremo 2017 cifre 9 nel blocco più a sinistra del risultato e 2018 cifre 9 in quello più a destra, per un totale di $2017+2018=4035$ cifre 9.

Quesito 17

Il record mondiale di cifre di π recitate a memoria risale al 21 ottobre 2015 e appartiene all'indiano Suresh Kumar Sharma con 70030 cifre.

Il record europeo è dell'olandese Rick de Jong con 22612 cifre (stabilito il 23 marzo 2015).

Il record italiano è invece di Nicola Pascolo che il 14 marzo 2012 ne ricordò 6935.

Se al posto delle cifre di π recitassimo quelle della parte decimale di $3/14$, quali sarebbero le cifre al 2018° , 6935° , 22612° e 70030° posto? Indicare come soluzione il numero composto dalle quattro cifre nell'ordine indicato.

Soluzione

Lo sviluppo decimale di $3/14$ è: $0,2142857142857\dots$. Abbiamo quindi un antiperiodo di una cifra (il 2) ed un periodo di 6 cifre (142857). Per conoscere la cifra in una data posizione P basta dunque calcolare il resto della divisione tra P-1 (si è tenuto conto della cifra dell'antiperiodo) e 6. A quel punto ai possibili resti (1, 2, 3, 4, 5, 0) corrisponderanno le cifre del periodo (rispettivamente 1, 4, 2, 8, 5, 7).

Siccome i resti della divisione per 6 di 2017, 6934, 22611 e 70029 sono, rispettivamente, 1, 4, 3, 3 la soluzione è 1822.

Quesito 18

Sugli scaffali di un negozio sono presenti un certo numero N di barattoli (inferiore a 1000): ognuno di questi contiene 135 confetti. È inoltre presente una scatola con 2018 confetti identici a quelli contenuti nei barattoli.

Dovendo riordinare il negozio, il proprietario compie le seguenti operazioni:

- svuota inizialmente la scatola e tutti i barattoli mettendo insieme tutti i confetti;
- getta via (differenziando opportunamente i rifiuti) sia la scatola che 13 barattoli ormai vuoti;
- distribuisce tutti i confetti nei barattoli rimanenti.

Alla fine dell'operazione, tutti i barattoli restanti contengono lo stesso numero di confetti.

Calcolare tutti i possibili valori di N e dare come soluzione la somma di tutti questi valori.

Soluzione

Invece di vuotare tutti i barattoli mettendo insieme tutti i confetti, immaginiamo di prendere solo i confetti della scatola più quelli dei 13 barattoli buttati via.

In totale avremo $2018 + 13 \cdot 135 = 3773$ pennarelli da distribuire equamente nelle scatole: l'operazione sarà possibile solo se il numero $N-13$ di barattoli rimasti è divisore di 3773. Essendo $3773 = 7^3 \cdot 11$, i possibili divisori di 3773 sono: 1, 7, 11, 49, 77, 343, 539, 3773 che corrispondono quindi a tutti i possibili $N-13$ barattoli rimasti (ma il caso $N-13=3773$ non va considerato perché viola l'ipotesi che i barattoli fossero inizialmente meno di 1000). Sommando 13 a ciascuno di questi valori, si ottengono i possibili valori di N : 14, 20, 24, 62, 90, 356, 552 la cui somma è 1118. (Si poteva arrivare al risultato più velocemente sommando i divisori di 3773 con l'apposita formula, sottraendo il divisore 3773 non accettabile e sommando infine $13 \cdot 7$, dovendo sommare 13 ad ognuno dei 7 divisori: $(1+7+7^2+7^3) \cdot (1+11) - 3773 + 7 \cdot 13 = 1118$).

Quesito 19

Si osserva il display di un orologio digitale e si decide di costruire un insieme di numeri applicando il procedimento seguente.

Si somma, minuto dopo minuto tra le 0.00 e le 23.59, il numero che rappresenta le ore con quello che rappresenta i minuti.

- Se tale somma è multiplo di 3, si inserisce nell'insieme il numero positivo corrispondente al prodotto tra il numero che rappresenta le ore e quello che rappresenta i minuti;
- Se il successivo di tale somma è multiplo di 3, si inserisce nell'insieme il numero negativo dato dall'opposto del prodotto tra il numero che rappresenta le ore e quello che rappresenta i minuti.

Qual è la somma di tutti i numeri appartenenti all'insieme così costruito?

Soluzione

Sia n il numero corrispondente alle ore. Distinguiamo tre casi:

A. Se n è multiplo di 3, i numeri positivi da inserire nell'insieme sono quelli che si ottengono moltiplicando n per i numeri dei minuti multipli di 3, mentre quelli negativi da inserire nell'insieme sono quelli che si ottengono moltiplicando n per i numeri dei minuti uguali ai multipli di 3 meno 1.

Calcolando si ha: $n \cdot 0 - n \cdot 2 + n \cdot 3 - n \cdot 5 + n \cdot 6 - n \cdot 8 + \dots + n \cdot 57 - n \cdot 59 = n \cdot (0 - 2 + 3 - 5 + 6 - 8 + \dots + 57 - 59)$. Sommando a coppie i numeri tra parentesi si ottiene -2 per 20 volte, e quindi la somma è $-40n$.

B. Se n è il successivo di un multiplo di 3, i numeri positivi da inserire nell'insieme sono quelli che si ottengono moltiplicando n per i numeri dei minuti uguali ai multipli di 3 meno 1, mentre quelli negativi da inserire nell'insieme sono quelli che si ottengono moltiplicando n per i numeri dei minuti pari ai successivi dei multipli di 3.

Calcolando si ha: $-n \cdot 1 + n \cdot 2 - n \cdot 4 + n \cdot 5 - n \cdot 7 + n \cdot 8 - \dots - n \cdot 58 + n \cdot 59 = n \cdot (-1 + 2 - 4 + 5 - 7 + 8 - \dots - 58 + 59)$. Sommando a coppie i numeri tra parentesi si ottiene 1 per 20 volte, e quindi la somma è $20n$.

C. Se n è multiplo di 3 meno 1, i numeri positivi da inserire nell'insieme sono quelli che si ottengono moltiplicando n per i numeri dei minuti uguali ai successivi dei multipli di 3, mentre quelli negativi da inserire nell'insieme sono quelli che si ottengono moltiplicando n per i numeri dei minuti multipli di 3.

Calcolando si ha: $-n \cdot 0 + n \cdot 1 - n \cdot 3 + n \cdot 4 - n \cdot 6 + n \cdot 7 - \dots - n \cdot 57 + n \cdot 58 = n \cdot (-0 + 1 - 3 + 4 - 6 + 7 - \dots - 57 + 58)$. Sommando a coppie i numeri tra parentesi si ottiene 1 per 20 volte, e quindi la somma è $20n$.

Facendo riferimento a tre ore consecutive h , $h+1$ e $h+2$ (con h multiplo di 3), in base a quanto calcolato nei casi A, B e C, la somma totale è dunque $-40h + 20(h+1) + 20(h+2) = -40h + 20h + 20 + 20h + 40 = 60$.

Siccome possiamo dividere le 24 ore della giornata in gruppi da tre ore consecutive h , $h+1$ e $h+2$ (con $h=0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$), la somma da calcolare moltiplicando 60 per gli otto possibili valori di h , ottenendo $60 \cdot 8 = 480$.

Quesito 20

Si osserva ancora il display dell'orologio digitale per un'intera giornata (dalle 0.00 alle 23.59).

In determinati orari, il numero che si legge sul display* è 82 volte la somma delle cifre di cui è composto.

Individuati tutti i numeri con questa caratteristica, fornire come soluzione la loro somma.

* Per "numero che si legge sul display" si intende il numero di tre o quattro cifre che si ottiene concatenando le ore e i minuti. Esempi: alle 3.14 si legge 314, alle 16.18 si legge 1618.

Soluzione

Un modo (ben poco elegante) di risolvere il problema è considerare i 29 multipli di 82 minori di 2359 e controllare, di volta in volta, che rappresentino un orario e che questo verifichi la condizione richiesta.

In alternativa, distinguiamo 3 casi.

A. Il numero delle ore è minore di 10 (e quindi ha una sola cifra). Indicando le cifre dell'ora con $a.bc$ (con a e c cifre tra 0 e 9 e b tra 0 e 5), la condizione richiesta diventa $100a + 10b + c = 82(a + b + c)$ che si può scrivere $18a = 72b + 81c$ e, semplificando per 9, $2a = 8b + 9c$ equivalente a $9c = 2(a - 4b)$.

Osserviamo che c può essere solo 0 o 2. Infatti c deve essere pari (al secondo membro c'è un numero pari) e minore o uguale a 2 (il massimo che si può ottenere al secondo membro al variare di a e b è 18).

Se $c=0$ si ricava $a=4b$, che è vera in questi tre casi: $a=0$ e $b=0$, $a=4$ e $b=1$, $a=8$ e $b=2$. Le prime tre soluzioni sono quindi **0.00**, **4.10**, **8.20**.

Se $c=2$ si ricava $a-4b=9$, che è vera solo se $a=9$ e $b=0$. La quarta soluzione è **9.02**.

B. Il numero delle ore è compreso tra 10 e 19 (e quindi la cifra delle decine del numero che rappresenta le ore è 1). Indicando le cifre dell'ora con $1a.bc$ (con a e c cifre tra 0 e 9 e b tra 0 e 5), la condizione richiesta diventa $1000 + 100a + 10b + c = 82(1 + a + b + c)$ che si può scrivere $918 + 18a = 72b + 81c$ e, semplificando per 9, $102 + 2a = 8b + 9c$. Notiamo che il primo membro è almeno 102 e che, al secondo membro, $8b$ è al massimo 40. Dunque $9c$ deve essere almeno 62 e quindi c deve essere maggiore di 6. Ma c deve essere anche un numero pari (se fosse dispari l'uguaglianza avrebbe a sinistra un numero pari e a destra un numero dispari), per cui c deve valere necessariamente 8.

Sostituendo in $102 + 2a = 8b + 9c$, si ha $102 + 2a = 8b + 72$ da cui, semplificando, $a = 4b - 15$ che è vera in questi due casi: $a=1$ e $b=4$, $a=5$ e $b=5$. Altre due soluzioni sono quindi **11.48** e **15.58**.

C. Il numero delle ore è compreso tra 20 e 23 (e quindi la cifra delle decine del numero che rappresenta le ore è 2). Indicando le cifre dell'ora con $2a.bc$ (con a cifra tra 0 e 3, b tra 0 e 5 e c tra 0 e 9), la condizione richiesta diventa $2000 + 100a + 10b + c = 82(2 + a + b + c)$. Notiamo che il primo membro è almeno 2000 e che, quindi, $2 + a + b + c$ deve essere almeno 25 e ciò è incompatibile con le condizioni su a , b e c .

Gli orari che verificano le condizioni del problema corrispondono quindi ai numeri 0, 410, 820, 902, 1148 e 1558 e la loro somma è 4838.