

SOLUZIONI I ALLENAMENTO REGIONALE TEMATICO – ARITMETICA – 17-NOV-2017

1) Determinare il più piccolo intero positivo che ha esattamente 8 divisori che sono multipli di 3 e 6 divisori che sono multipli di 5.

Risposta: 90

Svolgimento: il numero è $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

I divisori multipli di 3 sono: 3, 3^2 , $3 \cdot 2$, $3^2 \cdot 2$, $3 \cdot 5$, $3^2 \cdot 5$, $3 \cdot 10$, $3^2 \cdot 10$

I divisori multipli di 5 sono: 5, $5 \cdot 2$, $5 \cdot 3$, $5 \cdot 3^2$, $5 \cdot 2 \cdot 3$, $5 \cdot 2 \cdot 3^2$

2) I membri di una tribù hanno 10 dita alle mani e 9 ai piedi e quindi contano indifferentemente in base 10 o in base 19. Un intero positivo di due cifre è detto “sacro” se in entrambe le basi si scrive con le stesse due cifre ma invertite. Trovare in base 10 la somma di tutti i numeri sacri.

Risposta: 210

Svolgimento: siano a e b le cifre, poiché le cifre sono presenti in ordine diverso otteniamo che $10a+b=19b+a$ da cui $9a=18b$ cioè $a=2b$

I numeri sono 21 42 63 84 e la loro somma è 210.

3) Quali numeri di due cifre AB sono tali che $(AB)^2 = CAAB$, con $C=B-1$ (in notazione decimale)? Restituire la somma di tutti i numeri trovati.

Risposta: 76

Svolgimento: osserviamo intanto che se il quadrato di un numero termina con la stessa cifra del numero tale cifra può essere solo uno dei seguenti numeri 0,1,5,6

Quindi B è uno di questi quattro numeri, dalla condizione che $C=B-1$ e C positivo (il numero è di quattro cifre) escludiamo che B possa essere 0 o 1.

Analizziamo i due casi

- $B=5$ $(A5)^2 = (10A+5)^2 = 100A^2+100A+25$
 $4AA5 = 4000+100A+10A+5$

Uguagliando otteniamo $100A^2 - 10A - 3980 = 0$ $10A^2 - A - 398 = 0$ che non ha soluzioni comprese tra 1 e 9

- $B=6$ con lo stesso ragionamento otteniamo $10A^2 + A - 497 = 0$ che ha come unica soluzione intera $A=7$
L'unica soluzione per AB è 76.

4) Un sottoinsieme A dei numeri naturali compresi tra 1 e 100 è tale che la somma di due suoi elementi qualsiasi è divisibile per 6. Quanti elementi può avere, al massimo, il sottoinsieme A?

Risposta: 17

Svolgimento: i numeri devono essere tutti pari o dispari e devono essere tutti multipli di 3 (se in A ci fosse un numero non divisibile per 3 allora in A ci dovrebbe essere solo un altro elemento quello che sommato con lui sia divisibile per 3 e quindi l'insieme A avrebbe solo due elementi)

I multipli pari di tre tra 1 e 100 sono 16.

I multipli dispari di 3 tra 1 e 100 sono 17 quindi il numero massimo è 17.

5) Il meccanismo di un particolare ingranaggio è costituito da una lastra di metallo a forma di ottagono regolare i cui vertici sono numerati da 1 a 8 in senso orario. Una lancetta ha un'estremità fissa nel centro dell'ottagono e ruota a scatti spostando l'altra estremità in corrispondenza dei vertici. La lancetta si trova inizialmente in corrispondenza del vertice 1. Negli scatti dispari la lancetta si sposta in corrispondenza del vertice opposto. In corrispondenza degli scatti pari si sposta di un vertice in senso antiorario. Detto n il numero del vertice in corrispondenza del quale si trova la lancetta in corrispondenza del 2017-esimo scatto, fornisci come risultato il più grande divisore primo del numero la cui scrittura in base 10 è il numero di 6 cifre della forma $2n2n2n$.

Risposta 0037

Negli scatti dispari la lancetta procede di +4 (il segno + indica uno spostamento in senso orario) in senso orario. Negli scatti dispari si sposta di -1 (il segno - indica uno spostamento in senso antiorario). Ogni due scatti, a partire dalla posizione iniziale 1, si sposta di $+4-1=+3$. Pertanto al 2017-esimo scatto si troverà nella posizione $n = 1 + \left[\frac{2016}{2} \times 3 \right]_8 + 4 = 5$ (Nella formula precedente 1 indica la posizione iniziale, $\left[\frac{2016}{2} \times 3 \right]_8$ indica di quante posizioni, a partire dalla posizione iniziale, avanza fino al 2016-esimo scatto, il +4 indica l'avanzamento nel 2017-esimo scatto).

Il numero da scomporre dunque è $252525 = 25 \times 10^4 + 25 \times 10^2 + 25 = 25(10^4 + 10^2 + 1) = 5^2 \frac{(10^6-1)}{10^2-1}$
 $= 5^2 \frac{(10^3-1)(10^3+1)}{(10-1)(10+1)} = 5^2 \frac{(10-1)(10+1)(10^2+10+1)(10^2+10+1)}{(10-1)(10+1)} = 5^2 \times 111 \times 91 = 5^2 \times 3 \times 37 \times 7 \times 13$. Il numero cercato pertanto è 37.

6) Tra tutti gli interi aventi esattamente 54 divisori positivi trovare quello che ha distanza D minima da 7000. Dare come risposta il valore di tale distanza minima D.

Risposta 0200

Data la scomposizione in fattori primi di un numero $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, il numero dei divisori di m è dato da $d(m) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \dots \times (\alpha_n + 1)$. Nel caso in questione $d(m) = 54$. Essendo $54 = 2 \times 3^3$, si hanno solo i casi seguenti.

- $(\alpha_1 + 1) = 54$ e pertanto i numeri con esattamente 54 divisori ed esattamente un fattore primo sono tutti della forma $a = p_1^{53}$, con p_1 primo.
- $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) = 6 \times 9$ oppure $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) = 2 \times 27$ oppure $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) = 3 \times 18$ e pertanto i numeri con esattamente 54 divisori ed esattamente due fattori primi sono della forma $b = p_1^5 p_2^8$ oppure $c = p_1^1 p_2^{26}$ oppure $d = p_1^2 p_2^{17}$, con p_1, p_2 primi.

- $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times (\alpha_3 + 1) = 2 \times 3 \times 9$ oppure $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times (\alpha_3 + 1) = 6 \times 3 \times 3$ e pertanto i numeri con esattamente 54 divisori ed esattamente tre fattori primi sono della forma $e = p_1^1 p_2^2 p_3^8$ oppure $f = p_1^5 p_2^2 p_3^2$, con p_1, p_2, p_3 primi.
- $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times (\alpha_3 + 1) \times (\alpha_4 + 1) = 2 \times 3 \times 3 \times 3$ e pertanto i numeri con esattamente 54 divisori ed esattamente quattro fattori primi sono della forma $g = p_1^1 p_2^2 p_3^2 p_4^2$, con p_1, p_2, p_3, p_4 primi.

Il più piccolo numero con esattamente 54 divisori ed esattamente un fattore primo $a_0 = 2^{53}$.

I più piccoli numeri con esattamente 54 divisori ed esattamente due fattori primi, dei tipi b, c e d rispettivamente, sono $b_0 = 2^8 3^5$, $c_0 = 2^{26} 3$, $d_0 = 2^{17} 3^2$.

I più piccoli numeri con esattamente 54 divisori ed esattamente tre fattori primi, dei tipi e ed f rispettivamente, sono $e_0 = 2^8 3^2 5$, $f_0 = 2^5 3^2 5^2$.

Il più piccolo numero con esattamente 54 divisori ed esattamente quattro fattori primi è $g_0 = 2^2 3^2 5^2 7$.

Si verifica che $a_0 > c_0$ essendo $\frac{a_0}{c_0} = \frac{2^{53}}{2^{26} \times 3} = \frac{2^{27}}{3} > 1$.

In modo analogo si verifica che $c_0 > d_0$, $d_0 > b_0$, $b_0 > e_0$, $e_0 > f_0$, $f_0 > g_0$.

Essendo $g_0 < f_0 < e_0 < b_0 < d_0 < c_0$ calcoliamo

$$g_0 = 2^2 3^2 5^2 7 = 6300$$

$$f_0 = 2^5 3^2 5^2 = 7200$$

Essendo $f_0 > 7000$, non serve calcolare gli altri. Scriviamo ora in ordine crescente i numeri del tipo g.

$$g_0 = 2^2 3^2 5^2 7 = 6300; g_1 = 2^2 3^2 5^2 11 = 9900$$

Essendo $g_1 > 7000$, non serve procedere oltre ed il numero intero positivo avente esattamente 54 divisori per cui è minima la distanza da 7150 è quindi $f_0 = 7200$ e $D = 200$.

7) Scrivere la somma di tutti i numeri della forma $12p + 7q + 3n$ con (p, q, n) terna ordinata di interi positivi, con p e q primi, tale che $p^2 + q^2 = pqn + 1$.

Risposta **0107**

L'equazione $p^2 + q^2 = pqn + 1$ è simmetrica in p e q.

Se $p = q$ si ha $2p^2 = p^2 n + 1 \Rightarrow p^2(2 - n) = 1 \Rightarrow p^2 / 1 \Rightarrow p / 1 \Rightarrow$ il che è impossibile essendo p primo.

Se $p \neq q$ supponiamo $p > q$. $p^2 + q^2 = pqn + 1 \Rightarrow p^2 - pqn = 1 - q^2 \Rightarrow p(p - qn) = (1 - q)(1 + q)$.

Essendo p primo $p / (1 - q)(1 + q) \Rightarrow p / (1 - q)$ oppure $p / (1 + q)$.

Se $p / (1 - q) \Rightarrow p \leq 1 - q$. Ma avendo supposto $p > q \Rightarrow p \geq 1 + q$ e pertanto $1 + q \leq p \leq 1 - q \Rightarrow 1 + q \leq 1 - q \Rightarrow 2q \leq 0$ che è impossibile essendo q primo.

Se $p / (1 + q) \Rightarrow p \leq 1 + q$. Ma avendo supposto $p > q \Rightarrow p \geq 1 + q$ e pertanto $1 + q \leq p \leq 1 + q \Rightarrow p = 1 + q$. Essendo però p e q primi, dovendo essere consecutivi gli unici valori accettabili sono $p = 3$ e $q = 2$. Sostituendo ora in $p^2 + q^2 = pqn + 1$ si ha $n = 2$. Ricordandoci della simmetria dell'equazione $p^2 + q^2 = pqn + 1$ si ha che le uniche terne ordinate (p, q, n) che la soddisfano sono $(2, 3, 2)$ e $(3, 2, 2)$. Gli unici valori che

possono essere assunti dall'espressione $12p + 7q + 3n$ sono dunque $24 + 21 + 6 = 51$ e $36 + 14 + 6 = 56$ e la somma di questi valori è $51 + 56 = 107$.

8) Qual è la somma dei numeri primi che, contati una sola volta, compaiono nella scomposizione dei numeri della forma $n^4 + 4^n$ con n divisore di 630 minore di 9?

Risposta **0500**

$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \Rightarrow$ i divisori di 630 minori di 9 sono 1, 2, 3, 5, 6 e 7.

Per $n = 1$ si ha $n^4 + 4^n = 1 + 4 = 5$.

Per $n = 2$ si ha $n^4 + 4^n = 16 + 16 = 32 = 2^5$.

Per $n = 3$ si ha $n^4 + 4^n = 3^4 + 4^3 = 145 = 5 \times 29$.

Per $n = 5$ si ha $n^4 + 4^n = 5^4 + 4^5$. Senza svolgere i calcoli si può scrivere $5^4 + 4^5 = 5^4 + 4 \times 4^4$ ed applicare l'identità di Sophie Germain $(a^4 + 4b^4) = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$. Nel caso in questione si ha $a = 5$ e $b = 4$ pertanto $5^4 + 4^5 = (25 + 32 - 40) \times (25 + 32 + 40) = 17 \times 97$, che sono entrambi primi (per verificare che 97 è primo basta osservare che è primo con 2, 3, 5, 7 e cioè con i numeri primi $< \sqrt{97}$).

Per $n = 6$ si ha $n^4 + 4^n = 6^4 + 4^6$. Senza svolgere i calcoli si può scrivere $6^4 + 4^6 = 2^4 \times 3^4 + 2^{12} = 2^4(3^4 + 2^8) = 2^4 \times 337$. 337 è primo essendo primo con 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e cioè con i numeri primi $< \sqrt{337}$.

Per $n = 7$ si ha $n^4 + 4^n = 7^4 + 4^7$. Anche qui, senza svolgere i calcoli si può scrivere $7^4 + 4^7 = 7^4 + 4 \times 4^6 = 7^4 + 4 \times 2^{12} = 7^4 + 4 \times (2^3)^4 = 7^4 + 4 \times 8^4$ ed applicare ancora l'identità di Sophie Germain con $a = 7$ e $b = 8$ pertanto $7^4 + 4^7 = (49 + 128 - 112) \times (49 + 128 + 112) = 65 \times 289 = 5 \times 13 \times 17^2$.

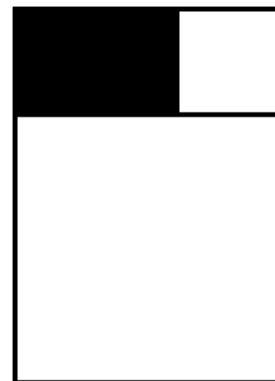
I fattori primi, contati una sola volta, che compaiono nelle scomposizioni di $n^4 + 4^n$ con n divisore di 630 minore di 9 sono dunque 2, 5, 13, 17, 29, 97, 337 e la loro somma è 500.

9. I due quadrati bianchi rappresentati nella figura sono quelli di area minore che verificano le seguenti condizioni:

- i loro lati misurano un numero intero di centimetri;
- le loro aree, in centimetri quadrati, misurano $132a$ e $15ab$ (a e b interi positivi).

Quanto vale, in centimetri quadrati, l'area del rettangolo colorato in nero?

[6534]



SOLUZIONE

Essendo $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, il più piccolo valore di a che rende $132a$ quadrato (cioè tale che tutti gli esponenti dei numeri primi che figurano nella scomposizione siano pari) è $33 = 3 \cdot 11$.

A questo punto, $15ab = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot b = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot b$. Per lo stesso ragionamento fatto sopra, il più piccolo valore di b che rende $15ab$ quadrato è $55 = 5 \cdot 11$.

Le aree dei due quadrati sono dunque $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$ e $3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$ dalle quali si ricavano i lati $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66\text{cm}$ e $3 \cdot 5 \cdot 11 = 165\text{cm}$. Il rettangolo colorato in nero ha come base la differenza tra i lati dei

due quadrati ($165 - 66 = 99cm$) e come altezza il lato del quadrato più piccolo ($66cm$). La sua area è quindi $99 \cdot 66 = 6534cm^2$.

10. Carlo e Leonardo stanno osservando un numero intero positivo scritto alla lavagna.

Carlo dice: "I miei risparmi, in euro, sono pari al quadrato di quel numero aumentato di 20".

Leonardo risponde: "Beato te! Io, di euro, ne possiedo solo 4 in più di quel numero".

Sapendo che il numero di euro di Carlo è multiplo di quello di Leonardo, determinare quali sono i possibili valori dei risparmi di Carlo (indicare come risposta la loro somma).

[1413]

SOLUZIONE

Sia n il numero scritto alla lavagna. I risparmi di Carlo sono $n^2 + 20$ mentre quelli di Leonardo $n + 4$.

Siccome gli euro posseduti da Carlo devono essere un multiplo di quelli di Leonardo, $\frac{n^2 + 20}{n + 4}$ deve essere

un numero intero. Scriviamo $\frac{n^2 + 20}{n + 4} = \frac{n^2 - 16 + 16 + 20}{n + 4} = \frac{(n - 4)(n + 4) + 36}{n + 4} = n - 4 + \frac{36}{n + 4}$.

In particolare, la frazione $\frac{36}{n + 4}$ sarà un numero intero se $n + 4$ è uno tra i divisori di 36. Per il fatto che

$n > 0$, i possibili valori per $n + 4$ sono 6, 9, 12, 18, 36 che corrispondono ai seguenti valori di n : 2, 5, 8, 14, 32.

Per questi valori di n , si ottengono i possibili valori dei risparmi di Carlo ($n^2 + 20$): 24, 45, 84, 216, 1044. Sommandoli si ottiene 1413.

11. Determinare per quali cifre a, b, c il numero $17a11b2017c$ è multiplo di 165. Per ogni terna a, b, c soluzione del problema si consideri il numero abc che si ottiene scrivendo le cifre una di seguito all'altra, nell'ordine. Qual è la somma dei numeri così ottenuti?

[2535]

SOLUZIONE

Essendo $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$, il numero $17a11b2017c$ dovrà essere divisibile per 3, per 5 e per 11.

Affinché sia divisibile per 3, anche la somma delle cifre $a + b + c + 20$ dovrà esserlo.

Affinché sia divisibile per 11, la differenza $a + c - b - 10$ tra la somma delle cifre di posto pari ($a + c + 5$) e la somma delle cifre di posto dispari ($b + 15$) dovrà essere multiplo di 11 (eventualmente negativo).

Infine, la divisibilità per 5 implica che $c=0$ o $c=5$. Distinguiamo i due casi.

Se $c=0$, la condizione di divisibilità per 11 diventa $a - b - 10$ multiplo di 11 e questo, essendo a e b cifre comprese tra 0 e 9, è possibile solo se $a - b - 10 = -11$, cioè $a = b - 1$.

La condizione di divisibilità per 3 diventa allora $b - 1 + b + 20 = 2b + 19$ multiplo di 3 da cui si ricava che b può assumere i valori 1, 4, 7 ed, in corrispondenza, a è uguale a 0, 3, 6.

I numeri abc che si ottengono da questo caso sono quindi 010, 340, 670.

Se $c=5$, la condizione di divisibilità per 11 diventa $a - b - 5$ multiplo di 11 e questo, essendo a e b cifre comprese tra 0 e 9, è possibile solo se $a - b - 5 = 0$ (cioè $a = b + 5$) o $a - b - 5 = -11$ (cioè $a = b - 6$). Analizziamo i due casi.

Se $a = b + 5$, la condizione di divisibilità per 3 diventa $a + b + c + 20 = b + 5 + b + 5 + 20 = 2b + 30$ multiplo di 3 da cui si ricava che b può assumere i valori 0, 3 (6 non dà un valore accettabile per a) ed, in corrispondenza, a è uguale a 5, 8. I numeri abc trovati sono 505 e 835.

Se $a = b - 6$, la condizione di divisibilità per 3 diventa $a + b + c + 20 = b + 5 + b - 6 + 20 = 2b + 19$ multiplo di 3 da cui si ricava che b può assumere il valore 7 (1 e 4 non danno valori accettabili per a) ed, in corrispondenza, a è uguale a 1. L'ultimo numero trovato è 175.

La somma richiesta è: $10+340+670+505+835+175=2535$.

12. Il prof. Rossi deve dividere i partecipanti ad una gara di matematica in squadre formate dallo stesso numero n di componenti. Egli nota che, formando squadre da 2 membri, resta fuori un partecipante. Formando squadre da 3, ne rimangono fuori 2. Se le squadre sono di 4 componenti, ne restano esclusi 3. E così via facendo tutti i tentativi fino a $n=10$. In sintesi, cercando di formare squadre di n componenti (con $2 \leq n \leq 10$), restando esclusi sempre $n-1$ partecipanti. Quanti sono, al minimo, i partecipanti alla gara?

[2519]

SOLUZIONE

Essendo il resto della divisione tra il numero P di partecipanti e ogni n compreso tra 2 e 10 uguale a $n-1$, effettuando la divisione tra $P+1$ ogni n compreso tra 2 e 10 si otterrà come resto 0.

$$(P \equiv_n n-1 \Rightarrow P+1 \equiv_n 0 \quad \forall n \in N, 2 \leq n \leq 10)$$

$P+1$ sarà quindi multiplo di tutti gli n da 2 a 10 e, dovendo cercare il numero minimo di partecipanti, avremo $P+1 = \text{mcm}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = 2520$, da cui $P = 2519$.

13) Trovare tutti gli interi x per cui l'espressione $x^2 + 8x$ risulti essere un quadrato perfetto. Fornire come risposta la somma dei valori assoluti degli interi trovati.

Soluzione: [0018] dovrà essere $x^2 + 8x = a^2$ cioè $x^2 + 8x - a^2 = 0$, risolvendola in x abbiamo $x = -4 \pm \sqrt{16 + a^2}$ che è un intero se $a = 0$ da cui $x = 0$ e $x = -8$, oppure se $16 + a^2 = b^2$ cioè $4^2 + a^2 = b^2$ con $a \neq 0$. Ora l'unica terna pitagorica con 4 come elemento è (3,4,5), quindi $a = 3$ e le soluzioni sono $x = 1$ e $x = -9$; la soluzione dunque $|0| + |-8| + |1| + |-9| = 18$.

14) Per quali numeri n sia $9^{\frac{n^2}{n-4}}$ che n sono numeri interi? Dare come risposta la somma dei valori trovati.

Soluzione: [0087] riscriviamo $9^{\frac{n^2}{n-4}}$ come $3^{\frac{2n^2}{n-4}}$ allora tale numero sarà intero se $\frac{2n^2}{n-4}$ è un intero non

negativo. Con la divisione fra polinomi otteniamo: $\frac{2n^2}{n-4} = 2n + 8 + \frac{32}{n-4}$, $n-4$ dovrà allora essere un divisore (positivo) di 32, cioè 1,2,4,8,16,32; allora i possibili valori di n sono 5,6,8,12,20,36, la somma di questi numeri è 87. (In realtà andrebbe bene anche la soluzione $n = 0$, ma questa non dà alcun contributo alla risposta 87).

15) Tra i numeri interi da 1 fino ad n compreso ne è stato tolto uno. La media dei rimanenti numeri è 26,18. Quale intero è stato tolto?

Soluzione: [0017] dobbiamo risolvere l'equazione $\frac{1 + \dots + n - x}{n-1} = 26,18$ dove x è il numero tolto.

Cerchiamo di stimare n : $\frac{1 + \dots + (n-1)}{n-1} \leq 26,18 \leq \frac{2 + \dots + n}{n-1}$ (a sinistra abbiamo scelto $x = n$ e a destra $x = 1$), da cui (usando la formula della somma dei primi n numeri interi)

$$\frac{n(n-1)}{2(n-1)} \leq 26,18 \leq \frac{(n+1)n/2-1}{n-1} \text{ semplificando e moltiplicando per 2 otteniamo: } n \leq 52,36 \leq n+2,$$

quindi n può essere solo 51 o 52. Se $n = 51$ allora $\frac{1+\dots+51-x}{50} = 26,18$ ha come soluzione $x = 17$, mentre se $n = 52$ non si hanno soluzioni intere.

16) Una terna di numeri interi positivi del tipo $(a, b, b+1)$ si dice una *terna pitagorica acuta* se $a^2 + b^2 = (b+1)^2$. Tali terne possiamo ordinarle nel seguente modo: $(a, b, b+1)$ è *minore* di $(c, d, d+1)$ se. Premesso ciò trovare la ventesima terna pitagorica acuta in ordine di grandezza crescente (la prima è $(3, 4, 5)$, la seconda è $(5, 12, 13)$ etc.). Dare come risposta la somma dei tre elementi della terna trovata.

Soluzione: [1722] da $a^2 + b^2 = (b+1)^2$ svolgendo i conti si ha $b = \frac{a^2-1}{2}$, quindi una generica terna

pitagorica acuta si può parametrizzare nel seguente modo: $\left(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2}\right)$ con a numero dispari.

Il ventesimo numero dispari che incontriamo partendo da 3 è $a = 41$, e la relativa terna è $(41, 840, 841)$. Il risultato è quindi: $41+840+841=1722$.

17) Quante sono le coppie (p, n) di interi non negativi con p primo tali che $p^{2+n}-3=6^n+n^6$?
[0002]

SOLUZIONE

L'equazione $p^{2+n}-3=6^n+n^6$ comprende due termini, -3 e 6^n , che sparirebbero considerandola modulo 3. Prima si deve prestare attenzione al caso particolare $n = 0$, un valore accettabile in quanto non negativo. Solo in questo caso $6^n = 6^0 = 1$ e quindi 6^n non è congruente a 0 modulo 3. Sostituendo $n = 0$ si ottiene $p^2 - 3 = 1$ e quindi la soluzione accettabile $(2, 0)$.

Se invece $n \neq 0$, si considera l'equazione di partenza modulo 3: $p^{2+n} \equiv n^6$ cioè $p^2 \equiv n^6 - n$. Si analizzano i tre casi $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$: se $n \equiv 0$ allora $p^2 \equiv 0^6 - 0 = 0$; se $n \equiv 1$ allora $p^2 \equiv 1^6 - 1 = 0$; $n \equiv 2$ allora $p^2 \equiv 2^6 - 2 = 64 - 2 = 62 \equiv 2$. Il terzo caso è impossibile: infatti, un quadrato perfetto non è mai congruo a 2 modulo 3; detto in altre parole, 2 non è un residuo quadratico modulo 3. Segue che, in ogni caso, $p^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Questo significa che, ricordando la definizione stessa di congruenza, $3 \mid p^2$, e quindi $3 \mid p$. Siccome p è un numero primo, l'unica possibilità è $p = 3$. Si sostituisce questo valore nell'equazione di partenza, ricavando $9+n-3=6^n+n^6$ cioè $6+n=6^n+n^6$. Secondo il testo del problema, n deve essere non negativo, e il caso $n = 0$ è stato già trattato. Quindi $n \geq 1$, il che determina $6^n \geq 6$ e $n^6 \geq n$, con uguaglianza nel solo caso $n = 1$. Segue che $6^n + n^6 \geq 6+n$ e l'uguaglianza vale se e solo se $n = 1$. In questo modo si determina la seconda soluzione $(3, 1)$, e si prova anche che non ne esistono altre.

18. Una rana sale una scala di 5000 gradini saltando prima sul 3°, poi scendendo di 1, salendo di 5, scendendo di 3, salendo di 7 e così via. Purtroppo uno scalino tra il 2004 e il 2018 (compresi gli estremi) è pericolante, ma non si sa quale. La rana potrà salire la scala solo se lo scalino pericolante è il numero... Dare come risposta la somma dei numeri degli scalini trovati.

Soluzione: [8044] partendo da terra, scalino 0, vediamo dove arriva la rana dopo un certo numero di "mosse". Si hanno due situazioni possibili: l'ultima mossa è a salire e allora $3-1+5-3+7-\dots+(2k+1)-(2k-1)+(2k+3) = -1+2k+1+2k+3 = 4k+3$ con $k = 1, 2, \dots$ e

quindi la rana raggiunge un gradino congruo a 3 modulo 4; oppure l'ultima mossa è a scendere e allora $3 - 1 + 5 - 3 + 7 - \dots + (2k + 1) - (2k - 1) = -1 + 2k + 1 = 2k$ con $k = 1, 2, \dots$ e quindi la rana raggiunge un gradino pari. Di conseguenza la rana non toccherà mai i gradini dispari congrui a 1 modulo 4; sarà quindi salva se il gradino pericolante è uno tra 2005, 2009, 2013, 2017, la cui somma fa 8044.

19) Anna ha inserito una parola d'ordine alla porta e rivela a Bruno che essa corrisponde al cubo della somma dei valori di n per i quali l'espressione $n^2 - 14n + 24$ è un numero primo. Qual è la parola d'ordine?

[2744]

SOLUZIONE

Si ha che $n^2 - 14n + 24 = (n - 2)(n - 12)$ è primo solo se uno dei due fattori è 1 o -1: nel primo caso $n = 13$, che effettivamente dà come risultato 11, e $n = 3$ che dà come risultato -9, che non è primo; nel secondo caso $n = 1$ che dà come risultato 11 che è primo, e $n = 11$ che dà come risultato -9, che non è primo. Le soluzioni sono quindi $n = 1, 13$. Da cui $14^3 = 2744$.

20) Scrivi la cifra delle unità del numero 2137^{753} .

[0007]

SOLUZIONE

Quando si considerano le potenze di un intero x modulo un qualche n (in questo caso $n = 10$), come abbiamo visto importa solo il valore $x \bmod n$ (in questo caso $x \bmod 10$ cioè la cifra delle unità). Se si moltiplica un numero che ha 7 come cifra delle unità ripetutamente per se stesso, si prova che si ottengono numeri che hanno come cifra delle unità la prima volta 9, la seconda 3, la terza 1 e la quarta nuovamente 7. Dunque la cifra delle unità delle potenze di 2137 sono 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, ... e si ripetono ogni 4. Siccome $753 = 1 + 4 \cdot 188$, la cifra delle unità di 2137^{753} è la stessa di 2137, cioè 7. Notiamo che l'elevamento a potenza è una classica operazione ripetuta.