

SOLUZIONI DEL I ALLENAMENTO REGIONALE TEMATICO

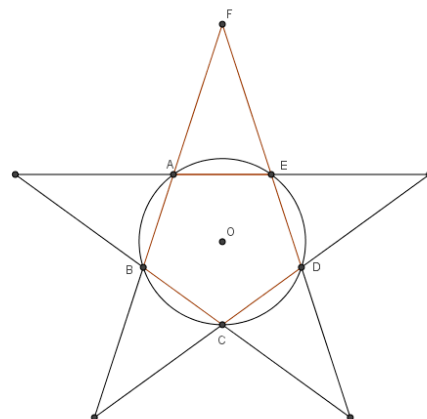
VENERDÌ 27 GENNAIO 2017

1. Un anno dopo il salvataggio di Nemo, Dory inizia ad avere sogni frammentari della propria vita prima di incontrare Marlin e Nemo, in particolare dei suoi genitori. Una notte sogna la stella a cinque punte in figura, che divide la circonferenza in cinque archi congruenti; calcola la somma delle ampiezze degli angoli $\hat{AOE}$, $\hat{BCD}$, $\hat{ACD}$, $\hat{AFE}$.

Soluzione: **288**

$$\hat{AOE} = 72^\circ \quad \hat{BCD} = 108^\circ \quad \hat{ACD} = 72^\circ \quad \hat{AFE} = 36^\circ$$

$$\hat{AOE} = 360^\circ : 5 = 72^\circ$$



$$\hat{BOA} \cong \hat{AOE} \cong \hat{EOD} = 72^\circ \rightarrow \hat{BOD} = 216^\circ \rightarrow \hat{BCD} = \frac{216}{2} = 108^\circ \text{ (angolo alla circonferenza)}$$

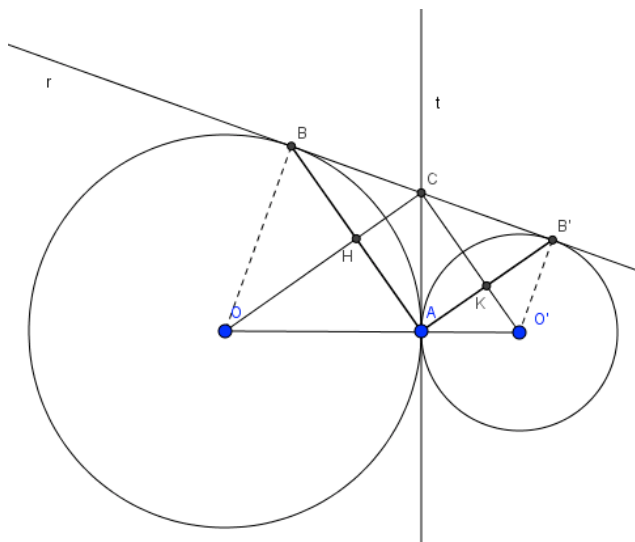
corrispondente all'angolo al centro $\hat{BOD}$)

$$\hat{ACD} \cong \frac{1}{2}(\hat{AOE} + \hat{EOD}) = 72^\circ$$

$$\hat{AFE} = 360^\circ - (\hat{ABC} + \hat{BCD} + \hat{CDE}) = 360^\circ - 3 \cdot 108^\circ = 36^\circ$$

2. Dopo aver sentito una lezione di Mr. Ray sulla migrazione, dove animali marini usano l'istinto per tornare a casa, i ricordi di Dory riaffiorano e lei ha il bisogno improvviso di trovare i suoi genitori, solo ricordando vagamente che vivono al "Gioiello di Morro Bay, California". Tale fantastico luogo è formato da due circonferenze di centri O e O' e rispettivamente di raggi 9 e 1, tangenti esternamente nel punto A . Se t è la tangente comune in A e r una retta tangente a entrambe le circonferenze rispettivamente nei punti B e B' , detto C il punto d'intersezione delle rette t e r , calcola il rapporto delle aree dei triangoli OCO' e BAB' . Solo in questo modo Dory potrà trovare i suoi cari, fornendo come risultato la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime tale rapporto.

Soluzione: **34**



$$\overline{OA} = 9, \overline{O'A} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} \cong \overline{AC} \cong \overline{CB'} \\ \angle BCO \cong \angle OCA \cong \alpha, \angle ACO' \cong \angle O'CB' \cong \beta \end{array} \right\} \text{ per } \\ \text{teorema dei segmenti di tangente}$$

$$2\alpha + 2\beta = \pi \rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \triangle OCO' \triangle \text{rettangolo}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{AO'}} = \sqrt{9 \cdot 1} = 3 \text{ (2° th di Euclide)}$$

$$\overline{BC} = \overline{AC} = \overline{CB'} = 3$$

$$\text{Area}(OCO') = \frac{OO' \cdot AC}{2} = 15$$

$\triangle BAB'$ triangolo rettangolo per proprietà caratteristica dei triangoli rettangoli ($\overline{BC} \cong \overline{AC} \cong \overline{CB'}$)

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{9 + 81} = 3\sqrt{10}$$

$$2\text{Area}(OBC) = \overline{OB} \cdot \overline{BC} = 27$$

$$\overline{BH} = \frac{2\text{Area}(OBC)}{OC} = \frac{27}{3\sqrt{10}}$$

$$\overline{AB} = 2BH = \frac{108}{3\sqrt{10}} \text{ (BH} \cong HA \text{ per teorema dei segmenti di tangente)}$$

Analogamente si ricava $\overline{AB'}$

$$\overline{CO'} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AO'}^2} = \sqrt{10}; \overline{B'K} = \frac{2\text{Area}(CB'O')}{CO'} = \frac{6}{\sqrt{10}}; \overline{AB'} = 2B'K = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Area}(BAB') = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AB'}}{2} = \frac{27}{5} \rightarrow \frac{\text{Area}(OCO')}{\text{Area}(BAB')} = \frac{25}{9} \rightarrow \text{soluzione} = 25 + 9 = 34$$

3. Con l'aiuto di Scorza, Dory, Marlin e Nemo cavalcano la corrente oceanica fino in California. I tre devono sfuggire a un calamaro gigante, che quasi uccide Nemo. Anche Dory viene ferita e, salita in superficie, viene salvata da volontari del Marine Life Institute. In tale istituto vi è una scuola di preparazione al salvataggio molto frequentata dagli abitanti degli oceani. Dory scopre che nell'attuale corso si verifica una particolare coincidenza matematica: 20 volte il numero degli alunni meno 13 volte il numero delle classi fa 2017. Considerando che il numero di alunni e il numero di classi sono positivi, quanti allievi al minimo frequentano l'istituto?

Risposta: 108

SOLUZIONE

Si tratta di risolvere l'equazione diofantea: $20x - 13y = 2017$ con x = numero degli attuali alunni e y = numero delle attuali classi.

$$20x - 13y = 1 \quad (20,13) = 1$$

Applico l'algoritmo euclideo:

$$20 = 1 \cdot 13 + 7 \rightarrow 7 = 20 - 1 \cdot 13$$

$$13 = 1 \cdot 7 + 6 \rightarrow 6 = 13 - 1 \cdot 7$$

$$7 = 1 \cdot 6 + 1 \rightarrow 1 = 7 - 1 \cdot 6$$

$$1 = 7 - (1 \cdot 6) = 7 - (13 - 1 \cdot 7) = 2 \cdot 7 - 1 \cdot 13 = 2 \cdot (20 - 1 \cdot 13) - 1 \cdot 13 = 2 \cdot 20 - 3 \cdot 13$$

$$20 \cdot 2 - 13(3) = 1 \quad (2, 3)$$

$$20x - 13y = 2017 \quad (4034; 6051)$$

$$20x - 13y = 0 \quad (13k; 20k)$$

$$\begin{cases} x = 4034 + 13k \\ y = 6051 + 20k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4034 + 13k \geq 0 \\ y = 6051 + 20k \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k \geq -\frac{4034}{13} \\ k \geq -\frac{6051}{20} \end{cases} \rightarrow k = -302$$

$$\begin{cases} x = 108 \\ y = 11 \end{cases} \rightarrow \text{il minor numero di studenti è } \mathbf{108}.$$

4. Dory e i suoi amici sono sfiniti dall'avventura e così, per riprendersi, decidono di prepararsi un delizioso dolcetto. Avendo a disposizione una bilancia a due piatti e un numero illimitato di pesetti da 50 g e da 70 g, devono trovare il minor numero possibile di pesetti da utilizzare per pesare, con una sola pesata, 1760 g di farina posta in uno dei due piatti. Dopodiché non rimane che impastare il tutto con ottime uova di pesce e mettere in forno!

Soluzione: 26

Si tratta di risolvere l'equazione diofantea : $5x + 7y = 1760$

$$5x + 7y = 1 \quad (5,7) = 1$$

Applico l'algoritmo Euclideo:

$$7 = 1 \cdot 5 + 2 \rightarrow 2 = 7 - 1 \cdot 5$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \rightarrow 1 = 5 - 2 \cdot 2$$

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7 - 5) = 5 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2)$$

$$5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) = 1 \quad (3, -2)$$

$$5 \cdot 528 + 7 \cdot (-352) = 1760 \quad (528, -352)$$

$$5x + 7y = 0 \quad (7k, -5k)$$

$$\begin{cases} x = 528 + 7k \\ y = -352 - 5k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 528 + 7k \geq 0 \\ -352 - 5k \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k \geq -\frac{528}{7} \\ k \leq -\frac{352}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k \geq -75,4 \\ k \leq -70,4 \end{cases} \rightarrow$$

$$k = -75 \vee k = -74 \vee k = -73 \vee k = -72 \vee k = -71$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 23 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 10 \\ y = 18 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 17 \\ y = 13 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 24 \\ y = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 31 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 23 \end{cases} \rightarrow 3+23=26$$

5. Dory sogna i suoi genitori che le svelano la combinazione della sua "conchigliaforte" ma, smemorata com'è, non si ricorda tutte le cifre. Si ricorda però che la combinazione è costituita dal numero 10xy049 e che tale numero è il quadrato di un numero primo. Scrivi il numero di due cifre xy.

Soluzione: $10xy049 = 1000000 + 14000 + 49 = (1000 + 7)^2$ da cui $xy = 14$

6. Dory decide di aiutare Bailey solo se lui saprà determinare quanti sono i numeri naturali tali che $n^4 - 3n^2 + 9$ sia un numero primo.

Risposta: 0002

$n^4 - 3n^2 + 9 = n^4 + 6n^2 - 9n^2 + 9 = (n^2 + 3)^2 - 9n^2 = (n^2 + 3 - 3n)(n^2 + 3 + 3n)$ L'unico caso in cui può essere primo è che sia $n^2 + 3 - 3n = 1$ da cui $n=1$ o $n=2$.

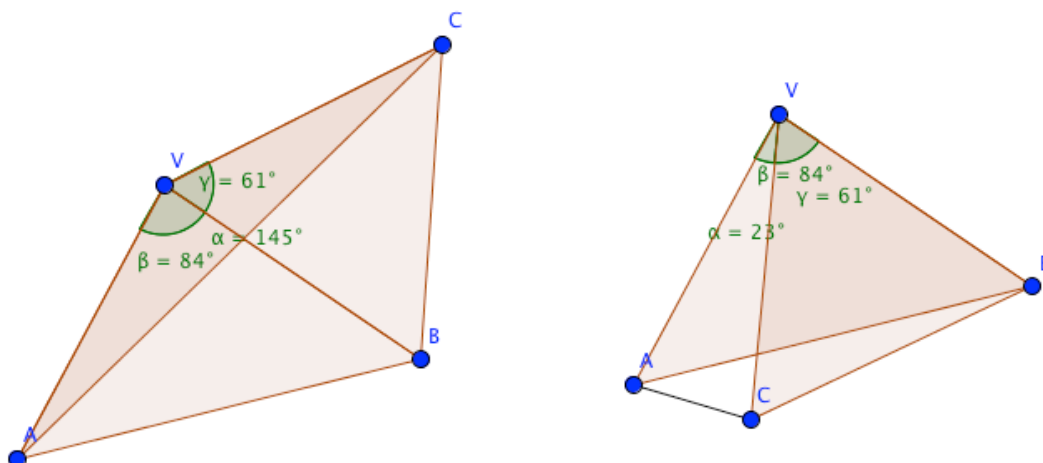
7. In fondo all'oceano c'è la roccia rosa che ha forma di piramide irregolare con base ABC e vertice V. Di questa piramide si conoscono gli angoli delle facce laterali $\hat{AVB}$ e $\hat{BVC}$ che valgono rispettivamente 84° e 61° . Quanti sono i possibili valori interi per le misure, in gradi, dell'angolo $\hat{CVA}$?

Risposta: 5912

Inscrivere una sfera nella piramide data equivale a inscrivere un cerchio in un triangolo isoscele di base 12 e lato obliquo $6\sqrt{3}$, esso ha raggio $3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Circoscrivere invece una sfera alla piramide data equivale a circoscrivere con un cerchio il triangolo isoscele di base $12\sqrt{2}$ e lato obliquo 12, tale cerchio ha raggio $6\sqrt{2}$. La somma dei due raggi è quindi $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ che è uguale a 11,5912.

8. Destiny non riesce a vedere bene la lontana gemma a forma di piramide quadrangolare regolare ma capisce che le facce sono triangoli equilateri di lato 12 cm. Deve costruire due sfere: una circoscritta e una inscritta alla piramide. Aiuta Destiny nel suo intento dando come risultato la parte decimale della somma in centimetri dei due raggi.

Soluzione: Affinché si formi l'angoloide triedro in V, l'angolo $\widehat{CVA}$ deve risultare minore della somma e maggiore della differenza degli altri 2. (*) Intuitivamente possiamo ragionare pensando ai casi limite che sono quelli rappresentati in figura.



Quindi il numero richiesto sarà dato dalla somma dei due angoli sottratta della loro differenza e sottratta ancora di 1 ovvero $145 - 23 - 1 = 121$.

9. Scorza, la tartaruga che ha aiutato Nemo e Dory, è sempre allegro e si diverte a proporre quesiti interessanti a chi incontra; oggi chiede a tutti i suoi amici: quali sono le ultime due cifre del numero 7^{2610} ?

Soluzione: è sufficiente applicare la congruenza modulo 100.

Considerato che $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$ e dividendo 2610 per 4, si ottiene $2610 = 4 \cdot 652 + 2$

quindi

$$7^{2610} = 7^{4 \cdot 652 + 2} = (7^4)^{652} \cdot 7^2 \equiv 7^2 \equiv 49 \pmod{100}$$

10. Marlin, il papà di Nemo, non vuole che il suo pesciolino si avventuri in un altro pericoloso viaggio insieme a Dory. Per scoraggiarlo gli propone un difficile quesito promettendogli che solo se riuscirà a risolverlo, lo lascerà andare. Aiuta Nemo determinando la cifra delle unità del numero $N = 1 + 2^{63} + 3^{63} + 4^{63} + \dots + 63^{63}$.

Risposta: 6

Soluzione: è sufficiente applicare la congruenza modulo 10.

Sapendo che $a \equiv a - n \pmod{n}$ si ottiene che

$$9 \equiv -1 \pmod{10}$$

$$8 \equiv -2 \pmod{10}$$

$$7 \equiv -3 \pmod{10}$$

$$6 \equiv -4 \pmod{10}$$

quindi

$$1^{63} + 2^{63} + 3^{63} + 4^{63} + 5^{63} + 6^{63} + 7^{63} + 8^{63} + 9^{63} = 1^{63} + 2^{63} + 3^{63} + 4^{63} + 5^{63} + (-4)^{63} + (-3)^{63} + (-2)^{63} + (-1)^{63} = 5^{63}$$

Stesso ragionamento si può fare per $11^{63} + 12^{63} + \dots + 18^{63} + 19^{63} = 15^{63} = 5^{63}$ e per tutti i numeri fino a 59^{63} . Inoltre ogni numero che termina per 0 è congruo a 0 (mod 10). Quindi il numero da trovare diventa:

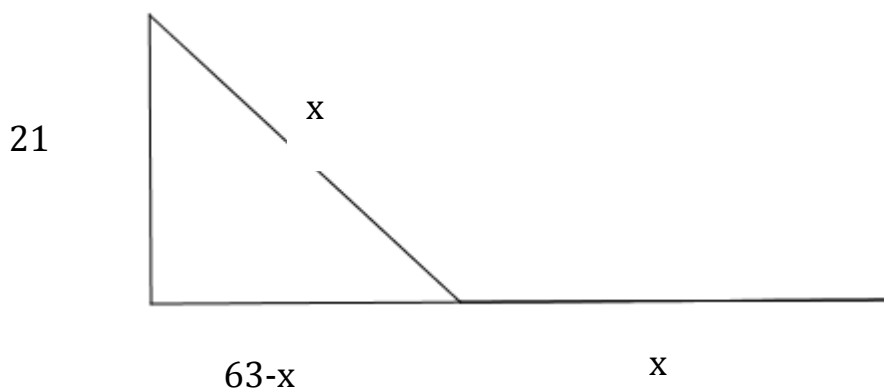
$$N \equiv 5^{63} + 15^{63} + 25^{63} + 35^{63} + 45^{63} + 55^{63} + 61^{63} + 62^{63} + 63^{63} = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 1^{63} + 2^{63} + 3^{63} = 30 + 1 + 2^{63} + 3^{63} = 31 + 2^{63} + 3^{63} \equiv 1 + 2^{63} + 3^{63}$$

Considerando che l'ultima cifra delle potenze di 2 e 3 ha un ciclo di 4, basta osservare che $63 \equiv 3 \pmod{4}$ quindi $N \equiv 1 + 2^{63} + 3^{63} \equiv 1 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 \equiv 6 \pmod{10}$.

11. Un gabbiano, che si trova appollaiato su un palo alto 21 metri posto sul molo, vede un motoscafo che sta raggiungendo il molo procedendo in linea retta e dirigendosi proprio verso il palo. Immediatamente il gabbiano si lancia verso il motoscafo attirato dal secchio pieno di pesci posto su di esso. Sapendo che gabbiano e motoscafo percorrono lo stesso tratto rettilineo prima d'incontrarsi, a quanti metri dal molo il gabbiano raggiunge il suo pasto sapendo che nell'istante in cui il gabbiano parte il motoscafo ha una distanza dal molo tripla dell'altezza del palo?

Risposta: 28

Soluzione: indicando con x il tratto comune percorso dal gabbiano e dal motoscafo si ha, per Pitagora, $(63 - x)^2 + 21^2 = x^2$ che restituisce come risultato $x = 35$. Quindi la distanza dal molo sarà $63 - 35 = 28$



12. Charlie e Jenny, i genitori di Dory, aspettano da tanti anni la loro amata figlia e costruiscono strisce di conchiglie per aiutarla a trovare la strada di casa. Oggi le conchiglie che si trovano fuori della loro casa, dopo essere state spostate dalla corrente, formano un triangolo e Charlie (che ama molto la Matematica) propone a sua moglie il seguente quesito: sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB e sia AD la bisettrice dell'angolo in A che incontra in D il lato BC. Sapendo che $AD + DC = AB$, quanto misura l'angolo ACB?

Risposta: 100

Soluzione: indichiamo con $2x$ gli angoli alla base del triangolo isoscele e tracciamo la parallela DE al lato AB. Anche gli angoli CED e CDE valgono $2x$ ed $EC \cong CD$. Il triangolo AED è isoscele (perché anche l'angolo $ADE = x$) quindi $AE \cong ED \cong DB$.

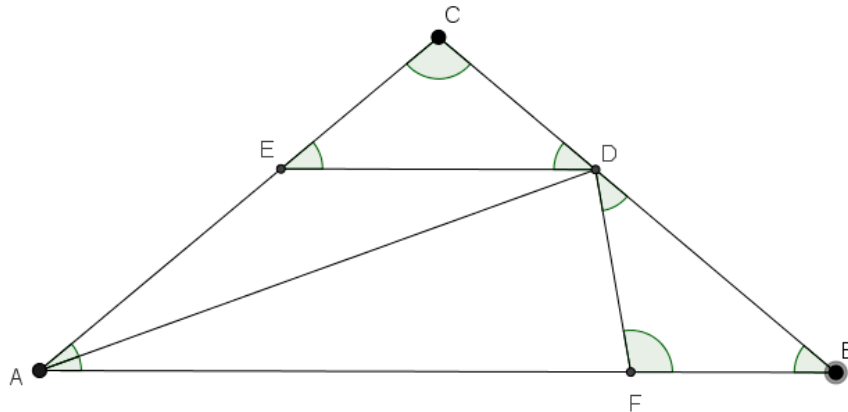
L'angolo in C che dobbiamo trovare sarà uguale a $180 - 4x$.

Costruiamo il triangolo isoscele ADF (con $AD \cong AF$) e, essendo per ipotesi $AD + DC = AB$ e $AD = AF$, avremo che $FB \cong DC$. Quindi i triangoli ECD e DFB sono congruenti (hanno $FB \cong DC$, $ED \cong DB$ e $EDC \cong DBF$ di misura $2x$). Quindi $DFB = 180 - 4x$.

Ma DFB è il supplementare di DFA che misura $\frac{180 - x}{2} = 90 - \frac{x}{2}$, quindi possiamo scrivere:

$$180 = 90 - \frac{x}{2} + 180 - 4x \text{ che risolta restituisce } x = 20.$$

Quindi l'angolo $ACB=180-4x=100$.

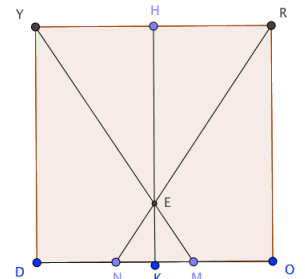


13. Dory viene mandata alla sezione quarantena del Marine Life Institute, dove incontra un polpo di nome Hank, che desidera la targhetta di Dory, dato che essa indica che anziché essere rimessa in libertà come gli altri pesci verrà mandata a un acquario permanente a Cleveland. La targhetta è a forma quadrata con il lato lungo 24 unità e con i vertici denominati con le lettere che formano il suo nome, DORY appunto! Il lato DO è suddiviso dai punti N, M in tre segmenti DN, NM, MO di uguale misura; tracciati i segmenti NR, MY che s'intersecano nel punto E, quanto vale l'area del triangolo NEM?

Risposta: 24

Soluzione: tracciando l'altezza HK passante per E e ponendo x la distanza EK, applicando la similitudine ai triangoli REY e NEM si ottiene: $HE : EK = RY : NM$, quindi, sostituendo: $(24-x) : x = 24 : 8$. Applicando la proprietà del comporre, si ha: $24 : x = 32 : 8$, da cui $x = 6$. L'area di NEM risulta quindi:

$$Area_{NEM} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ unità}^2.$$



14. Dory, Marlin e Nemo vanno nel reparto Quarantena della città di Cleveland alla ricerca dei genitori della pesciolina; qui trovano il serbatoio che contiene tutti gli altri pesci chirurgo. Tale serbatoio è un solido la cui base è un pentagono equilatero, inscritta nel triangolo isoscele ABC; il lato EF di tale pentagono giace sulla base BC e i lati AD, AG sui lati AB, AC. Sapendo che i lati obliqui del triangolo ABC misurano 10 cm e la base 12 cm, i tre sventurati devono calcolare la lunghezza del lato del pentagono per avere una misura della capacità del serbatoio. Fornire come risposta le prime 4 cifre decimali dopo la virgola del numero trovato

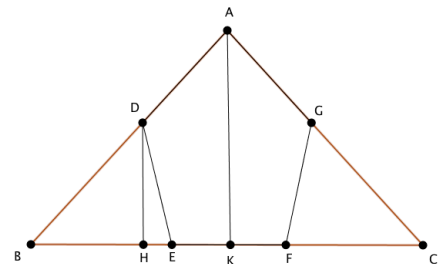
Risposta: 4566

Soluzione: considerando la figura a fianco, si pone $AD = DE = EF = FG = GA$. Applicando la similitudine ai triangoli DHB e ABK si ha: $DH : AK = BD : AB$

cui si ha $DH : 8 = (10-2x) : 10$. Quindi $DH = \frac{4}{5}(10-2x)$. Analogamente,

$BH : BK = BD : AB$, da cui si ha $BH : 6 = (10-2x) : 10$. Quindi

$$BH = \frac{3}{5}(10-2x). \text{ Ora, } HE = BE - BH = 6 - x - 6 + \frac{6}{5}x = \frac{1}{5}x.$$



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo DHE si ha:

$$\left[\frac{4}{5}(10-2x)\right]^2 + \left(\frac{1}{5}x\right)^2 = (2x)^2 \Rightarrow \frac{16}{25}(100+4x^2-40x) + \frac{1}{25}x^2 = 4x^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow 7x^2 + 128x - 320 = 0.$$

La soluzione negativa va scartata e quindi si ha: $x = \frac{24\sqrt{11}-64}{7} = 2,2283 \Rightarrow 2x = EF = 4,4566$. La soluzione è pertanto 4566.

15. Dory deve salvare i due amici Marlin e Nemo che sono stati imprigionati nel serbatoio e caricati su un camion. La poverina, disperata, si lancia sull'autostrada percorsa dal camion nel tentativo di liberare i due malcapitati, ma si trova di fronte ad una fila interminabile degli enormi automezzi. L'unica cosa che può salvarla è conoscere il numero di targa del camion in questione. La sola informazione in suo possesso è che la targa contiene la somma dei numeri

$$\frac{7n+83}{n+7}$$

naturali n per cui l'espressione $\frac{7n+83}{n+7}$ è un intero positivo. Aiuta Dory a rintracciare il camion. Fornire come risposta tale somma.

Risposta: 37

Soluzione: si ha $\frac{7n+83}{n+7} = \frac{7n+49+34}{n+7} = 7 + \frac{34}{n+7}$ quindi l'espressione sarà un intero positivo per i valori di n tali che $n+7$ divide 34. Essendo $34=2 \cdot 17$ poniamo: $n+7 = 2$, che restituisce la soluzione non accettabile $n=-5$ (n deve essere positivo); $n+7 = 17$ cioè $n = 10$; $n+7 = 34$ cioè $n = 27$. Quindi le soluzioni sono due: 10 e 27. La soluzione è 37.

16. Individuato il camion in questione, Dory si trova davanti a un altro problema da risolvere: i suoi amici sono imprigionati in una teca chiusa da un lucchetto, la cui combinazione è la soluzione del seguente enigma: data la seguente operazione, sapendo che le cifre A, B, C, D sono tutte diverse dalle cifre scritte, individua il numero composto dalle lettere incognite disposte in ordine alfabetico:

$$\begin{array}{r} B \quad B \quad D \quad C \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} C \quad B \quad A \quad D \quad = \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 0 \quad 1 \quad 7 \end{array}$$

Risposta: 4536

Soluzione: dalla cifra delle unità si ricava che $7 + D = C$ e dalla cifra delle decine $1 + A = D$ o $1 + A = D - 1$. D non può assumere i valori 0, 1, 2, 7; pertanto se $D = 3$, $A = 2$ impossibile; se $D = 4$, $C = 1$ e riporto di 1, impossibile; se $D = 5$, $A = 4$ ma $C = 2$, impossibile; quindi $D = 6$, $A = 5$ o $A = 4$; A non può essere 5 perché D sarebbe 7. Quindi $A = 4$; restano solo le cifre 3, 5, 8, 9. B e C devono essere tali che la loro differenza sia 2 e quindi possono essere solo $B = 5$ e $C = 3$. La soluzione è $A = 4$, $B = 5$, $C = 3$, $D = 6$. La risposta è 4536.

17. Dory ascolta affascinato una lezione di Mr. Ray su come gli animali marini usano l'istinto per trovare la via di casa, ma lui è più fiducioso del pensiero razionale: basta avere una bussola e conoscere le coordinate di casa che sono date dalla risposta al quesito seguente: Analizzando la seguente successione di numeri: 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,..... (cioè ogni numero naturale n viene inserito progressivamente nella successione con esattamente n copie di sé stesso) si chiede quali sono il 2016° e il 2017° termine della suddetta sequenza di numeri. Dare come risposta la somma dei due numeri trovati.

Soluzione: 0127

Osserviamo che $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ e che $2016 = \frac{63 \cdot 64}{2}$. Quindi il 2016° termine sarà 63 e il 2017° sarà 64, la loro somma è 127.

18. Scorza, Dory, Marlin e Nemo guardano una partita di *palla subacquea*, ciascuno ha un suo giocatore preferito, i loro numeri di maglia sono dati dalla risposta al seguente quesito. Un numero naturale n lo possiamo esprimere in *base fattoriale* in maniera univoca nel seguente modo: $n = (a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1)_f = a_k \cdot k! + a_{k-1} \cdot (k-1)! + \dots + a_2 \cdot 2! + a_1 \cdot 1!$ dove i coefficienti a_j sono numeri interi compresi tra 0 e j (ricordiamo che $m! = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$). Premesso ciò, dire quali sono le quattro cifre più a destra della notazione in base fattoriale di 2017. Dare come risposta $a_4 a_3 a_2 a_1$.

Soluzione: 4001

Osserviamo che $6! = 720$, $5! = 120$, $4! = 24$, $3! = 6$, $2! = 2$ e $1! = 1$; con un po' di divisioni si ottiene $2017 = 2 \cdot 720 + 4 \cdot 120 + 4 \cdot 24 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$, quindi $2017 = (2, 4, 4, 0, 0, 1)_f$ le cui ultime cifre sono 4001.

19. Dory ha poco tempo per riuscire a salvare Marlin e Nemo, controlla l'ora dando un'occhiata veloce ad un vecchio orologio analogico sperduto sul fondo oceanico a causa di un terribile naufragio. L'orologio segna le 9.15 ma Dory subito si ferma a riflettere quale sia l'angolo (minore) che le lancette delle ore e dei minuti formano tra di loro. Dare come risposta tale angolo in gradi sessagesimali moltiplicato per 10 (le lancette si muovono in maniera continua, cioè non a scatti).

Soluzione: 1725

Alle 9.00 la lancetta delle ore punta precisamente sul numero 9; alle 9.15 la lancetta dei minuti ha compiuto un quarto di giro, quindi la lancetta delle ore ha compiuto un quarto dell'arco che va dalle 9 alle 10, in gradi ha percorso un angolo $\delta = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 7,5^\circ$; la lancetta dei minuti è orizzontale verso destra mentre quella delle ore è sollevata di $7,5^\circ$ rispetto all'orizzontale verso sinistra, quindi l'angolo minore tra le due lancette è $180^\circ - 7,5^\circ = 172,5^\circ$, moltiplicato per dieci avremo 1725° .

20. La pianta della caverna del *calamaro gigante* ha una strana forma geometrica: è un esagono inscritto in una circonferenza con cinque lati di lunghezza 81 metri e le diagonali maggiori di lunghezza 144 metri. Nemo e Dory si divertono a calcolare quanto sia lungo l'altro lato. Aiutateli a risolvere il problema e date come risposta la lunghezza del lato incognito dell'esagono.

Soluzione: 0031

Facciamo riferimento alla figura seguente: applichiamo il teorema di Tolomeo ai quadrilateri ABCD e ACDF; nel primo caso abbiamo:

$$CD \cdot AB + BC \cdot AD = AC \cdot BD \quad \text{cioè: } 81 \cdot x + 81 \cdot 144 = y \cdot z;$$

nel secondo caso: $AC \cdot DF + CD \cdot AF = AD \cdot CF$, cioè $y \cdot z + 81^2 = 144^2$. Eliminando yz dalle due equazioni e risolvendo in x otteniamo:

$$x = \frac{16^2 \cdot 9^2 - 81^2 - 81 \cdot 144}{81} = 256 - 81 - 144 = 31$$

