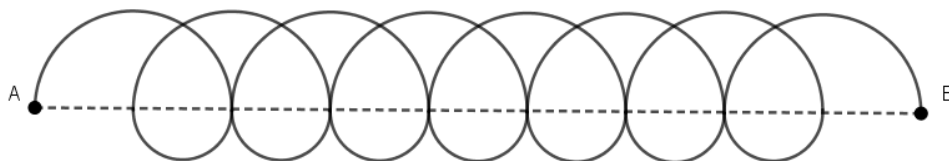


SOLUZIONI IV ALLENAMENTO REGIONALE TEMATICO
VENERDÌ 23 FEBBRAIO 2018

- 1) La distanza tra A e B è 9 m. Quanti metri è lunga la traiettoria disegnata?

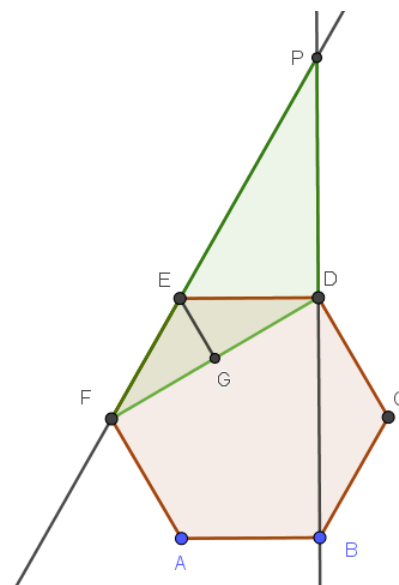


SVOLGIMENTO: la traiettoria disegnata è costituita da 8 semicirconferenze di raggio 1 m e 7 semicirconferenze di raggio 0,5m. Quindi la lunghezza della traiettoria sarà

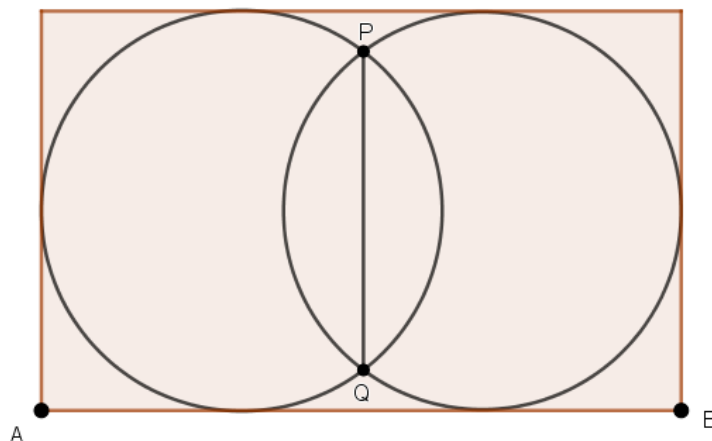
$$L = 8 \cdot (3,1416 \cdot 1) + 7 \cdot (3,1416 \cdot 0,5) = 3,1416 \cdot 11,5 = 36,1284$$
 Quindi la soluzione è la sua parte intera cioè 36.

- 2) Si consideri un esagono regolare ABCDEF di area 2018 cm². Sia P il punto d'intersezione delle rette BD e FE. Quanto misura l'area del triangolo DPF?

Svolgimento: Nella figura si osserva che FEG, EGD e PED sono triangoli rettangoli con angoli di 30° e 60° e mentre i primi due sono congruenti e hanno area pari ad $\frac{1}{6}$ dell'area dell'esagono, PED ha ipotenusa doppia dell'ipotenusa di EDG quindi ha area 4 volte l'area di EDG. Quindi l'area di PFD è 6 volte l'area di EGD. Ma EGD ha area pari ad $\frac{1}{12}$ dell'area dell'esagono quindi il triangolo PFD ha area pari alla metà dell'area dell'esagono cioè 1009 cm².



- 3) Determinare il raggio dei due cerchi di figura sapendo che il lato AB del rettangolo misura 160 cm e la corda PQ misura 80 cm.



Svolgimento: collegando P con il centro del cerchio e chiamando x il raggio del cerchio si avrà che

$$x + \sqrt{x^2 - 40^2} = 80$$
 che risolta permette di ottenere x=50.

4. Sia ABCD un quadrato di lato 10 cm e ABE il triangolo equilatero costruito esternamente al quadrato ABCD. Quanto misura l'area del cerchio che passa per CDE?

Svolgimento: per risolvere il quesito proviamo ad utilizzare la geometria analitica. Inseriti nel piano cartesiano i vertici del quadrato e del triangolo equilatero, devo trovare la circonferenza passante per i punti:

$$C(-5;0) \quad D(5;0) \quad E(0;10+5\sqrt{3}).$$

Per trovare il centro G del cerchio interseco l'asse del segmento CD (cioè l'asse y) con l'asse del segmento ED. Per trovare l'asse del segmento ED trovo il coefficiente angolare della retta ED:

$$m_{ED} = \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = \frac{-10 - 5\sqrt{3}}{5} = -2 - \sqrt{3}$$

La retta ad essa perpendicolare avrà coefficiente angolare $m = -\frac{1}{m_{ED}} = -\frac{1}{-2 - \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$ e il

punto medio del segmento ED avrà coordinate $F\left(\frac{5}{2}; 5 + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$.

Quindi l'asse del segmento ED avrà equazione

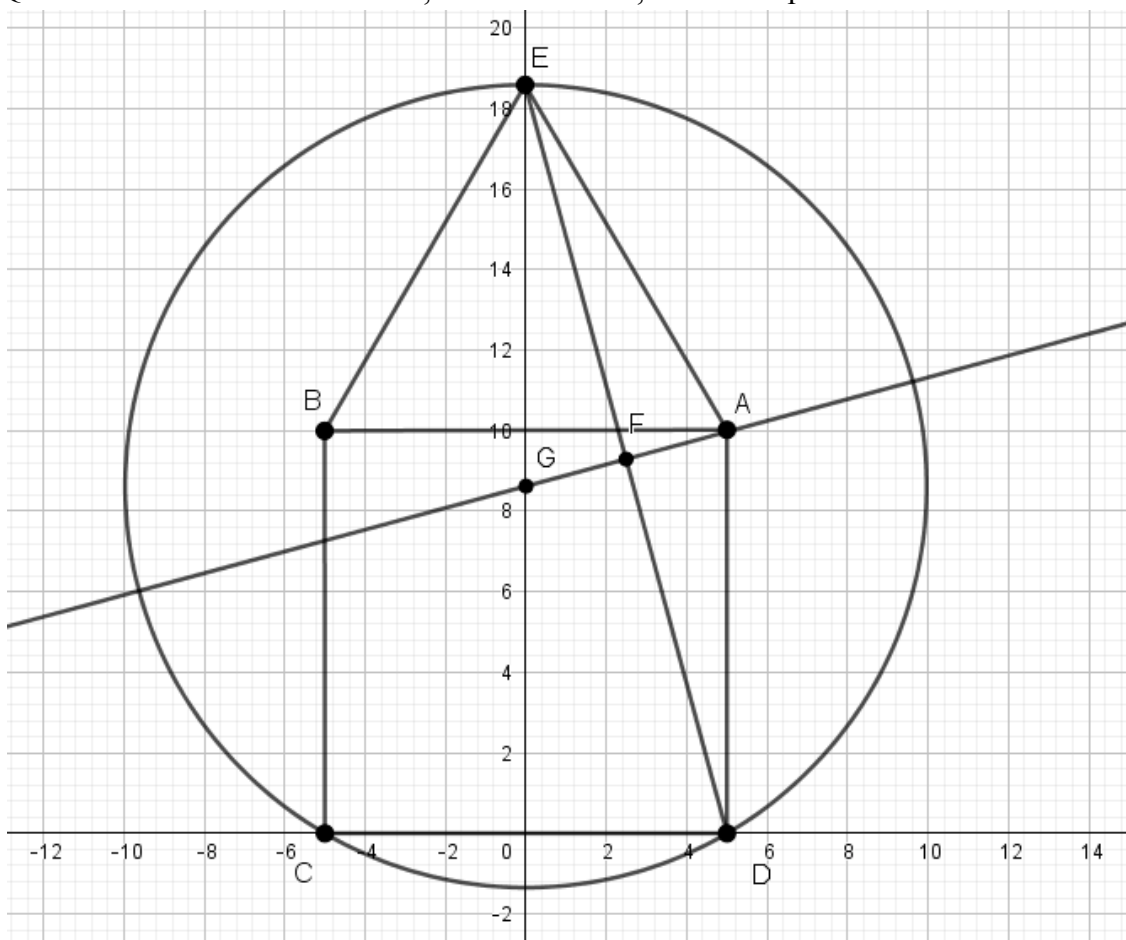
$$y - 5 - \frac{5}{2}\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$y = (2 - \sqrt{3})x + 5\sqrt{3}$$

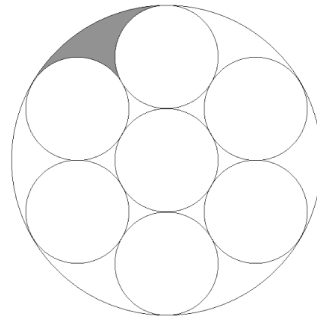
Quindi le coordinate di G sono $G(0; 5\sqrt{3})$ e il raggio della circonferenza è

$$EG = 10 + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 10$$

Quindi l'area del cerchio è $A = 3,1416 \cdot 10^2 = 314,16$ e la sua parte intera è 314.



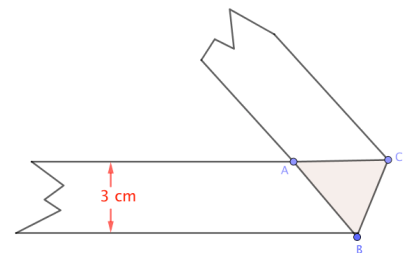
- 5) Nella figura il raggio dei cerchi piccoli è 1. Quanto vale l'area della figura tratteggiata? Esprimete il risultato moltiplicato per 1000.



Soluzione: L'esagono che ha vertici nei centri dei sei cerchi periferici è regolare e ha lato 2. Pertanto la sua area è $6\sqrt{3}$. Ciascuna delle sei regioni dei cerchi piccoli esterna all'esagono ha area $\frac{2}{3}\pi$. Tenuto conto che l'area del cerchio grande è 9π , si ha che l'area della regione tratteggiata è:

$$\frac{1}{6} \left[9\pi - 6 \cdot \frac{2}{3}\pi - 6\sqrt{3} \right] = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$$

6. Una striscia di carta con bordi paralleli distanti 3 cm viene piegata in modo che una parte di essa risulti parzialmente sovrapposta alla parte rimanente (vedi figura). Quant'è l'area minima della zona ombreggiata? Esprimete il risultato in millimetri quadrati.



Soluzione: con riferimento alla figura, l'area del triangolo ABC è uguale ad $\frac{AC \cdot BH}{2}$, dove BH è l'altezza uscente da B. Siccome BH è costante, il minimo richiesto si ottiene quando è minima la lunghezza di AC cioè quando AC è perpendicolare a BA. In tal caso il triangolo ABC rettangolo in A l'area è uguale a $9/2 \text{ cm}^2$ ovvero 450 mm^2 .

7. Si ritagli il contorno di una piramide esagonale regolare, con gli spigoli di base lunghi 1 cm, lungo gli spigoli laterali e si distenda la superficie così ottenuta sul piano della base ottenendo una stella a sei punte. Si congiungano le punte di tale stella in modo da formare un esagono convesso. Sapendo che l'area dell'esagono citato è $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$, determinare la parte intera del volume in millimetri cubi della piramide.

Soluzione: L'esagono che si viene a formare risulta regolare e composto da 6 triangoli equilateri ciascuno dei quali ha area $3\sqrt{3} \text{ cm}^2$; di conseguenza il lato dell'esagono risulterà essere $2\sqrt{3} \text{ cm}$. Osserviamo che l'apotema della piramide sommata con l'apotema dell'esagono di base coincide con il lato dell'esagono che si viene a formare. Quindi per differenza si ricava l'apotema della piramide che risulterà essere $\frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ cm}$. Ricaviamo così l'altezza della piramide che sarà $\sqrt{6} \text{ cm}$. Da qui il volume sarà $\frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ cm}^3$ ovvero $2121,3 \text{ mm}^3$.

8. Sia C un cubo di lato unitario e lo si ruoti di 60° intorno a una sua diagonale ottenendo così un cubo C'. Si determini il volume del solido intersezione di C e C'. Esprimete il risultato in frazione ridotta ai minimi termini e sommate numeratore e denominatore.

Soluzione: Sia VW una diagonale del cubo, si consideri il piano perpendicolare alla diagonale VW passante per il suo punto medio. Tale piano taglia il cubo lungo un esagono regolare (ABCDEF). L'esagono viene trasformato in sé da una rotazione di 60° attorno a VW e quindi l'intersezione richiesta contiene i vertici V, W e l'esagono. Detto H il centro dell'esagono, la piramide ABHV contenuta nel primo cubo viene trasformata nella piramide BCHV che quindi è contenuta sia nel primo che nel secondo cubo. D'altra parte il triangolo BCV appartiene a una faccia di C' e quindi tutti i punti della piramide BLCV sono esterni a questa faccia e così non appartengono a C'. Ripetendo il ragionamento per gli altri lati dell'esagono e per il vertice W si vede allora che l'intersezione richiesta è costituita da una doppia piramide che ha vertici in V, W e base nell'esagono. Il lato dell'esagono è pari a $1/\sqrt{2}$, dunque la sua area è $3\sqrt{3}/4$, l'altezza di ciascuna piramide è $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e pertanto il volume richiesto è $\frac{3}{4}$.

9. Su una circonferenza sono tracciate due corde tra loro perpendicolari. Si osserva che una delle due corde è lunga 14 m mentre l'altra è divisa dal loro punto di intersezione in due parti di misura 4 m e 6 m. Determinare il raggio (in millimetri) della circonferenza.

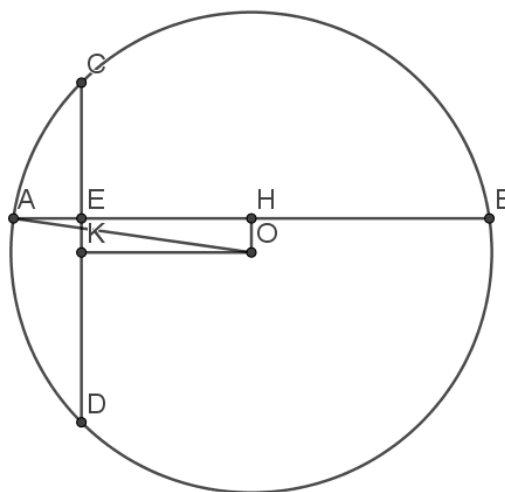
SOLUZIONE: I dati del problema sono $\overline{AB} = 14m$, $\overline{CE} = 4m$, $\overline{ED} = 6m$. Per il teorema delle corde, $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{CE} \cdot \overline{CD}$, dunque $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = 4m \cdot 6m = 24m^2$. Dovendo essere, per ipotesi, $\overline{AE} + \overline{EB} = 14m$, conoscendo la loro somma ed il loro prodotto si possono ricavare le misure dei segmenti $\overline{AE} = 2m$ e $\overline{EB} = 12m$ (o viceversa, ottenendo una soluzione simmetrica).

Chiamando H e K i punti medi delle due corde, è noto che i segmenti OH e OK sono perpendicolari alle corde stesse. Si ha

$$\overline{OH} = \overline{EK} = \overline{CK} - \overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{CD} - \overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot 10 - 4 = 1m$$

e $\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 7m$. Per il teorema di Pitagora,

$$R = \overline{AO} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7,071m = \mathbf{7071\,mm}.$$

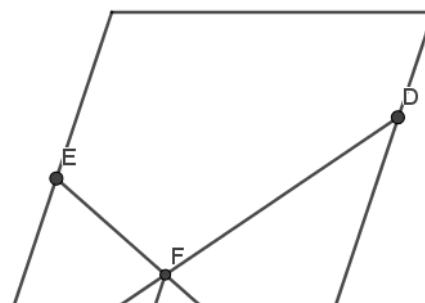


10. Andrea, Barbara e Carlo si trovano in salone a forma di parallelogramma. Andrea e Barbara occupano gli estremi di uno dei lati minori, mentre Carlo si trova in un punto interno dello stesso lato. Carlo inizia a muoversi in direzione parallela ai lati maggiori e di ferma dopo aver percorso una distanza X. In questa situazione, Andrea vede Carlo proiettato su uno dei lati maggiori del parallelogramma in un punto a una distanza di 23 metri da Barbara. Barbara vede invece Carlo proiettato sull'altro lato maggiore, in un punto a una distanza di 18 metri da Andrea. Esprimere la distanza X in metri sotto forma di frazione ridotta ai minimi termini e indicare come risultato la somma tra il numeratore e il denominatore.

SOLUZIONE: La situazione si può rappresentare nella figura a lato, dove $\overline{AE} = 18m$ e $\overline{BD} = 23m$.

Dalla similitudine dei triangoli CAF e BAD, si ottiene

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}}$$



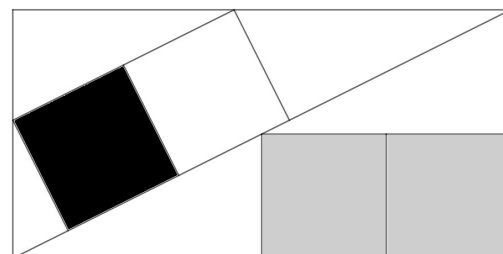
Dalla similitudine dei triangoli CBF e ABE, si ottiene $\frac{\overline{FC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$.

Sommando membro a membro le due uguaglianze, si ha: $\overline{FC} \left(\frac{1}{\overline{BD}} + \frac{1}{\overline{AE}} \right) = \frac{\overline{AC} + \overline{CB}}{\overline{AB}}$.

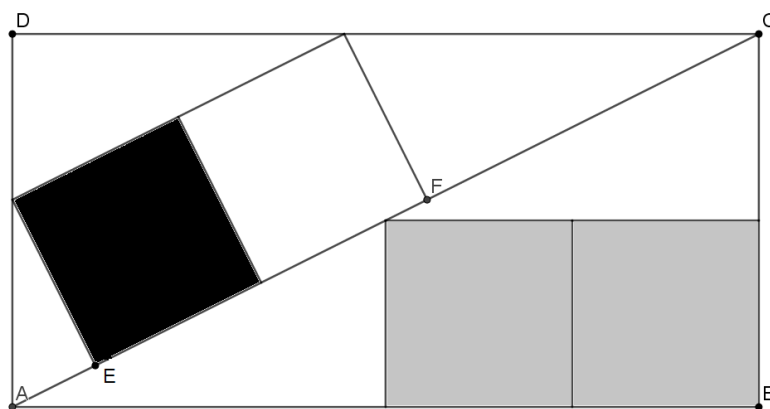
Notiamo che la quantità al secondo membro vale 1 e sostituiamo le lunghezze note per ricavare $X = \overline{FC}$:

$$\overline{FC} = \frac{1}{\frac{1}{23} + \frac{1}{18}} = \frac{414}{41}. \text{ La soluzione è } 414 + 41 = \mathbf{0455}.$$

11. Nel rettangolo della figura a lato sono stati disegnati quattro quadrati, a due a due congruenti. Uno dei quadrati grigi ha un vertice nel centro del rettangolo mentre il quadrato nero e quello bianco hanno, ciascuno, un lato sulla diagonale del rettangolo e un vertice su un lato del rettangolo. L'area di ciascun quadrato grigio è 21 m^2 . Determinare l'area (in m^2) del quadrato nero, esprimerla sotto forma di frazione ridotta ai minimi termini e indicare come risultato la somma tra il numeratore e il denominatore.



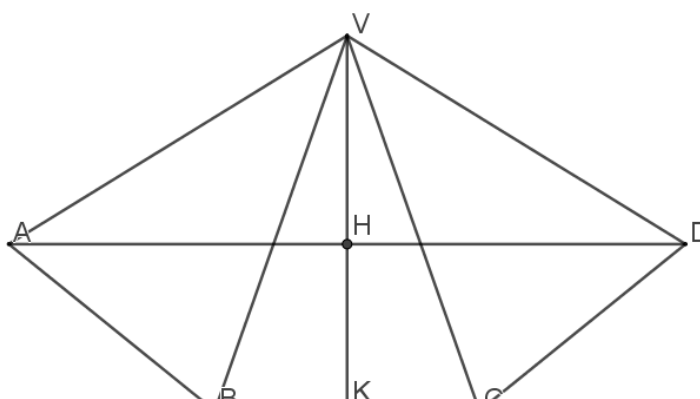
SOLUZIONE: Chiamiamo a la misura del lato dei quadrati grigi e b quella del lato degli altri due quadrati. Per ipotesi, il triangolo rettangolo ABC ha un cateto doppio dell'altro e tale proprietà vale per tutti gli altri triangoli rettangoli che si formano nella figura (tutti simili tra loro). Ne deriva che $\overline{AE} = \frac{1}{2}b$, $\overline{EF} = \overline{FC} = 2b$. Essendo poi $\overline{AB} = 4a$ e $\overline{BC} = 2a$, si può applicare il teorema di Pitagora al



triangolo ABC ottenendo: $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Rightarrow (4a)^2 + (2a)^2 = \left(\frac{1}{2}b + 2b + 2b\right)^2 \Rightarrow 16a^2 + 4a^2 = \left(\frac{9}{2}b\right)^2 \Rightarrow 20a^2 = \frac{81}{4}b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{81} \cdot 20a^2$. Essendo, per ipotesi, $a^2 = 21 \text{ m}^2$ si ha $b^2 = \frac{4}{81} \cdot 20 \cdot 21$ e semplificando per 3 numeratore e denominatore, $b^2 = \frac{560}{27}$. La soluzione è $560 + 27 = \mathbf{0587}$.

12. Un tetraedro ha come base un triangolo equilatero di lato 2 m e come facce laterali tre triangoli isosceli con i lati obliqui di misura 3 m. Determinare la lunghezza del percorso chiuso più breve che parte e termina in uno dei vertici della base e che attraversa completamente le tre facce laterali (cioè incontra ogni segmento che ha come estremi il vertice opposto alla base e un punto della base stessa). Esprimere il risultato in millimetri.

SOLUZIONE: Rappresentiamo lo sviluppo piano delle facce laterali del tetraedro. Il percorso richiesto è quello che parte dal punto A e termina nel punto D (che coincide con A ricomponendo il tetraedro). Il percorso più breve è dunque il segmento AD. Tracciamo l'altezza (e mediana) VK del triangolo BVC. Notiamo che l'angolo AVH è il triplo dell'angolo BVK (infatti $\angle AVB \simeq \angle BVC \simeq 2\angle BVK$) il seno



dell'angolo BVK è dato dal rapporto tra le misure di BK e VB che, per i dati forniti dal testo, è pari a $\frac{1}{3}$. Il seno di AVH si può dunque calcolare con la formula di triplicazione del seno:

$senAVK = sen3BVK = 3senBVK - 4sen^3BVK = 3 \cdot \frac{1}{3} - 4 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1 - 4 \cdot \frac{1}{27} = \frac{23}{27}$. Si può infine calcolare la lunghezza di $\overline{AD} = 2\overline{AH} = 2\overline{AV}senAVK = 2 \cdot 3 \cdot \frac{23}{27} = \frac{46}{9} = 5 + \frac{1}{9} = 5,111 \dots m$. La soluzione, in millimetri, è **5111**.

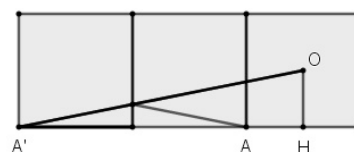
13. Quanto è lungo il percorso più breve sulla superficie di un cubo di lato $l = \sqrt{13}$ metri che parte dal centro di una faccia del cubo, tocca uno spigolo della faccia opposta ed arriva infine in un vertice della faccia di partenza? Dare la risposta in millimetri.

Soluzione: [9192] il percorso più corto è il cammino che partendo da O dopo aver attraversato due spigoli rimbalza ed arriva in A, la sua lunghezza coincide con quella del cammino OA' (per le leggi della riflessione).

Calcoliamocela:

$$OA = OA' = \sqrt{OH^2 + HA'^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{13}}{2}\right)^2} = 13 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui $OA = 9,192495m = 9192,4952mm$



14. Qual è il volume di una sfera inscritta nell'ottaedro regolare di spigolo $l = 3\sqrt{6}$?

Soluzione: [0113] la figura a fianco rappresenta mezzo ottaedro, la sfera inscritta avrà il centro in O e sarà tangente alle facce laterali della piramide mostrata in figura; il suo raggio r sarà quindi l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo VOH. Sia l lo spigolo

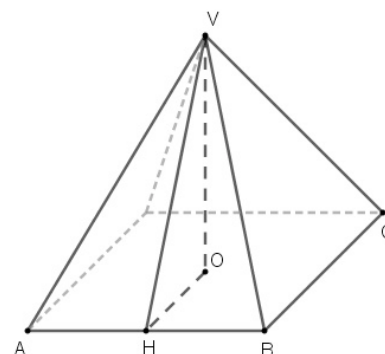
dell'ottaedro, allora $VH = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, $OH = \frac{l}{2}$ e

$$VO = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{2}}{2}. \text{ Calcolando ora l'area del}$$

triangolo rettangolo VOH in due modi abbiamo:

$$VO \cdot OH = VH \cdot r, \text{ da cui } r = \frac{l}{\sqrt{6}} = 3. \text{ Il volume della}$$

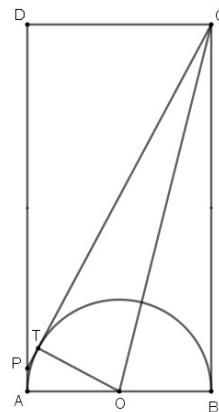
$$\text{sfera sarà quindi: } V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 36\pi = 113,0976.$$



15. Sia dato il rettangolo ABCD con $AB=2$ e $BC=4$; si costruisca la semicirconferenza interna al rettangolo di diametro AB; si tracci infine il segmento CP tangente alla semicirconferenza ed intersecante AD nel punto P. Quanto è lungo il segmento CP? Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

Soluzione: [0021] chiamiamo $\alpha = \widehat{OCB} = \widehat{OCT}$, così
 $\widehat{PCD} = 90^\circ - 2\alpha$. Ora dal triangolo COB si ha: $t = \tan(\alpha) = \frac{OB}{CB} = \frac{1}{4}$;
 mentre dal triangolo CPD e dalle formule parametriche si ha:

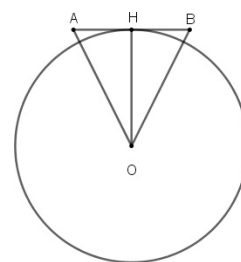
$$CP = \frac{DC}{\cos(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{2}{\sin(2\alpha)} = \frac{2}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{t} = \frac{17}{4} \cdot 17+4=21.$$



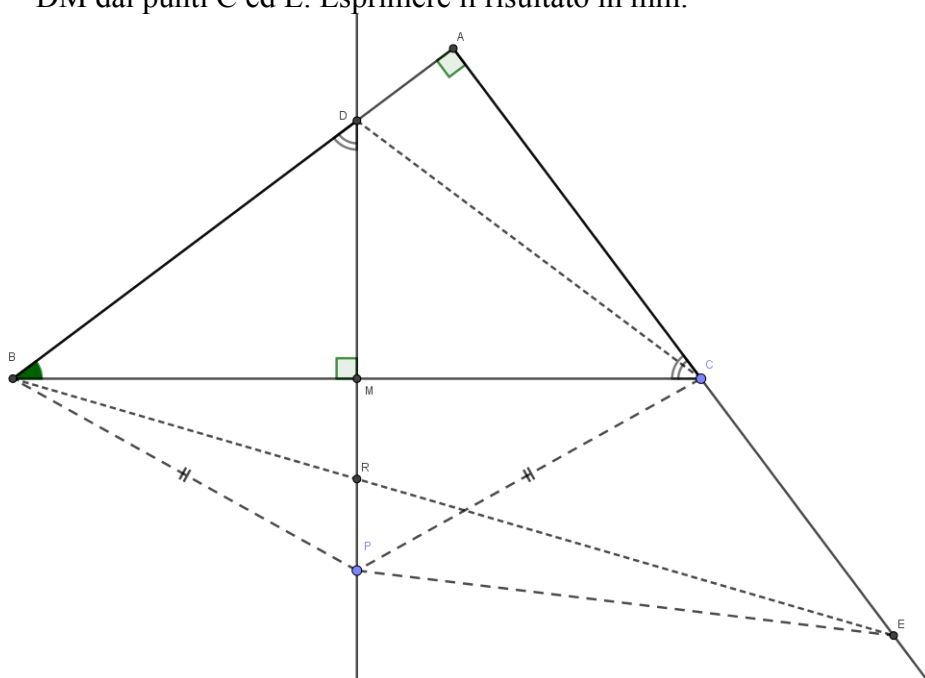
16. Un poligono regolare ha 54 diagonali ed è circoscritto ad un cerchio di raggio $r = 2 + \sqrt{3}$; trovare il perimetro del poligono.

Soluzione: [0024] dalla formula per trovare il numero di diagonali si ha: $\frac{n(n-3)}{2} = 54$, da cui $n = 12$. Calcoliamo ora il perimetro del dodecagono circoscritto alla circonferenza di raggio $r = 2 + \sqrt{3}$. Ricordiamo prima che $\widehat{AOB} = 30^\circ$, quindi $\widehat{AOH} = 15^\circ$ e $\tan(15^\circ) = \frac{1 - \cos(30^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 2 - \sqrt{3}$. Il perimetro è dunque:

$$p = 12 \cdot AB = 12 \cdot 2 \cdot r \cdot \tan(15^\circ) = 24 \cdot (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 24.$$



17. Nel triangolo ABC il lato BC misura 60 cm. Detto M il punto medio di BC e D il punto in cui l'asse di CB incontra il lato AB, il quadrilatero ADCM è inscritto in una circonferenza di diametro 37,5 cm. Sul prolungamento di AC dalla parte di C si consideri un punto E tale che $\frac{CE}{AC} = \frac{7}{9}$. Determinare il valore minimo S della somma delle distanze di un punto P della retta DM dai punti C ed E. Esprimere il risultato in mm.



18. Sia $A_1B_1C_1D_1$ un quadrato di area $S_1 = 1 \text{ cm}^2$. Per ogni $i = 2, \dots, n$ sia $A_iB_iC_iD_i$ un quadrato avente lo stesso centro O di $A_1B_1C_1D_1$ e siano A_i appartenente alla retta OA_1 , B_i alla retta OB_1 , C_i alla retta OC_1 , D_i alla retta OD_1 . Indicando con S_i l'area di $A_iB_iC_iD_i$, sia $S_i = S_{i-1} + i$, per $i = 2, \dots, n$. Determinare la lunghezza in cm della spezzata di vertici $A_1B_1C_1D_1A_1B_2C_2D_2A_2B_3C_3D_3A_3B_4C_4D_4A_4B_5C_5D_5A_5B_6C_6D_6A_6B_7C_7D_7A_7B_8C_8D_8A_8B_9C_9D_9A_9B_{10}C_{10}D_{10}$ costituita da 78 segmenti.

La lunghezza della spezzata di vertici $A_1B_1C_1D_1A_1B_2C_2D_2A_2B_3C_3D_3 \dots$ costituita da 78 segmenti è
 $L = 4 \overline{A_1B_1} + \overline{A_1B_2} + \overline{B_2C_3} + \overline{C_3D_4} + \overline{D_4A_5} + \dots = 4 \overline{A_1B_1} + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \dots + s_{74}$
 Consideriamo due quadrati di aree rispettivamente S_i e S_{i+1} e di lati l_i e l_{i+1} . Con riferimento alla seconda figura,

$$s_i = \sqrt{x_i^2 + (l_i + x_i)^2}. \text{ Essendo } x_i = \frac{l_{i+1} - l_i}{2}, \text{ si ha } l_i + x_i = l_i + \frac{l_{i+1} - l_i}{2} = \frac{l_{i+1} + l_i}{2}. \text{ Pertanto}$$

$$s_i = \sqrt{\left(\frac{l_{i+1} - l_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_{i+1} + l_i}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{l_{i+1}^2 + l_i^2 - 2l_{i+1}l_i + l_{i+1}^2 + l_i^2 + 2l_{i+1}l_i}{4}} = \sqrt{\frac{l_{i+1}^2 + l_i^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{S_{i+1} + S_i}.$$

$$S_1 = 1 \text{ cm}^2, S_2 = 1+2=3 \text{ cm}^2, S_3 = 3+3=6 \text{ cm}^2, S_4 = 6+4=10 \text{ cm}^2, S_5 = 10+5=15 \text{ cm}^2, \dots. \text{ Pertanto}$$

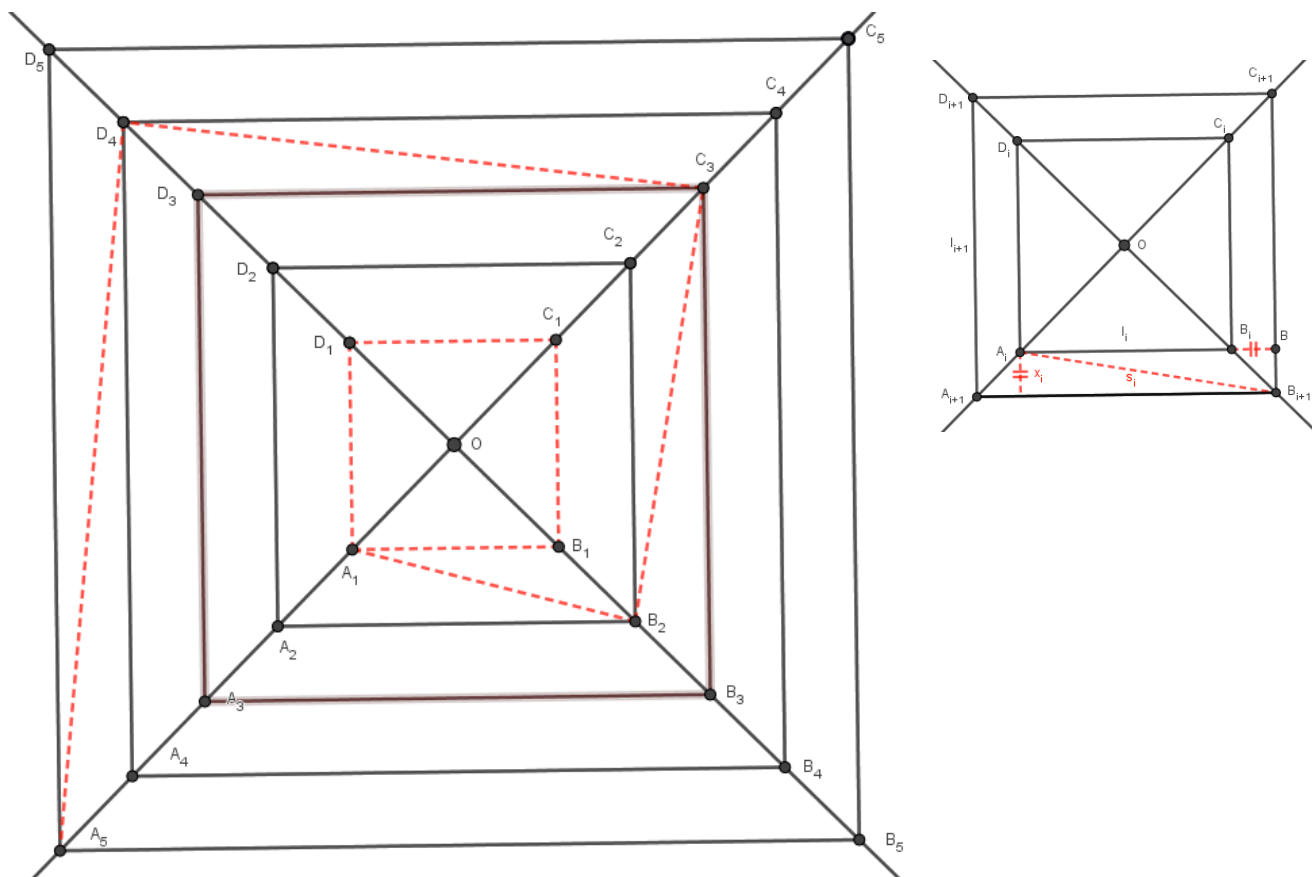
$$L =$$

$$=$$

$$4 + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{1+3} + \sqrt{3+6} + \sqrt{6+10} + \sqrt{10+15} + \dots) = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} (2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 75) =$$

$$4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{77 \cdot 74}{2}$$

La parte intera di L è 2018.



19. In un trapezio rettangolo ABCD di lato obliquo CB e area $10\sqrt{3} \text{ m}^2$, la somma delle basi misura 20 a. Siano P e Q due punti rispettivamente della base maggiore AB e della base minore DC tali che $\overline{AP} = 3a$ e $\overline{DQ} = 4a$. Qual è la probabilità in percentuale che scegliendo a caso un punto di ABCD esso veda PQ sotto un angolo non minore di 30° ?

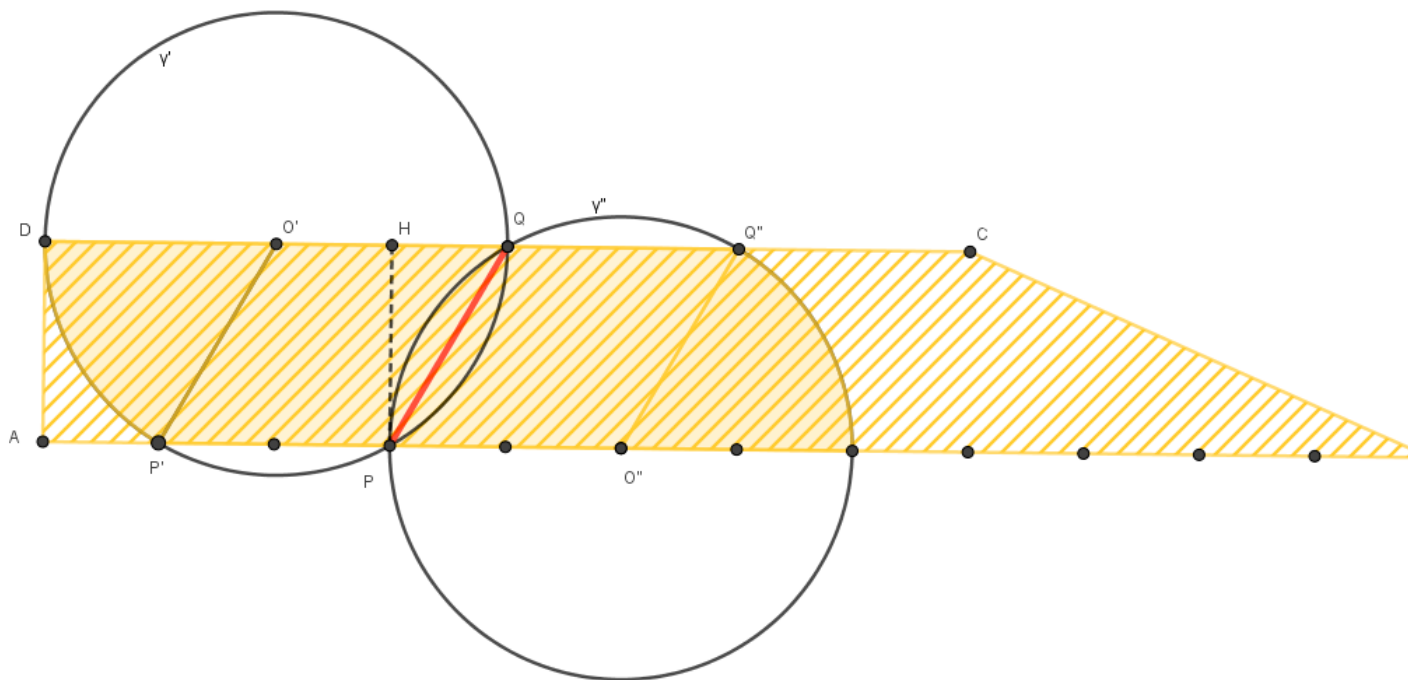
Svolgimento:

$\overline{AD} = \frac{2A_{(ABCD)}}{AB+DC} = a\sqrt{3}$. Sia H il piede della perpendicolare condotta da P ad DC. Il triangolo PHQ è retto in H e $\overline{PH} = a\sqrt{3}$ e $\overline{HQ} = a$ pertanto $\angle PQH = 60^\circ$. AB//DC pertanto $\angle QPH = 30^\circ$. Detto O' il punto medio di DC, $\angle Q'PH = 60^\circ$ ($\angle QPH$ e $\angle Q'PH$ sono congruenti). Essendo $O'Q = 2a$, tutti i punti

del cerchio γ' di centro O' e raggio $2a$ vedono PQ sotto un angolo $\geq 30^\circ$. Altrettanto vale per tutti i punti del cerchio γ'' simmetrico di γ' rispetto a PQ . γ'' ha raggio $2a$ e centro nel punto O'' della base AB con $\overline{PO''} = 2a$ ($PO'Q$ e $PO''Q$ sono equilateri con PQ in comune quindi $O'O''$ è l'asse di PQ). I punti di $ABCD$ che vedono PQ sotto un angolo $\geq 30^\circ$ sono tutti e soli quelli che appartengono a $\gamma' \cup \gamma''$. La regione di piano S comune a $\gamma' \cup \gamma''$ e $ABCD$ è data dall'unione del parallelogramma $OP'O''Q''$ e dei due settori circolari di γ' e γ'' di angoli al centro

$\widehat{DO'P'} = \widehat{Q''O''P''} = 60^\circ$. Pertanto $A_{(S)} = 2 \frac{60}{360} \pi (2a)^2 + 4a^2 \sqrt{3}$ e la probabilità cercata è

$$\frac{A_{(S)}}{A_{(ABCD)}} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi \sqrt{3}}{9} + 1 \right) = 0,6418.$$



20. Un trapezio rettangolo $ABCD$ ha la base minore che è $\frac{4}{9}$ della base maggiore e l'altezza che è il triplo della base minore. Sia H il piede della perpendicolare condotta da C alla base AB e sia P il punto di BC tale che $\overline{BH} = \overline{BP}$. Sia G il punto di intersezione di AP e CH e sia Q il punto di intersezione con AC del prolungamento di BG . Detto Q' il punto di intersezione con AD della parallela ad AB passante per Q , determinare il rapporto fra le aree di $ABCD$ e AQQ' .

Svolgimento:

Posto $DC = AH = 4a$, $AB = 9a$, $HC = 5a$, $AD = 12a$. HCB è rettangolo pertanto $CB = 13a$. $BP = 5a$ e $CP = 8a$. $A_{(ABCD)} = 78a^2$.

Per il teorema di Ceva $\frac{AH}{HB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$ da cui $CQ = 2QA$. Per il teorema di Talete $CQ : QA = DQ' : Q'A$ pertanto $DQ' = 2Q'A$. Essendo però $DA = 12a$, $DQ' = 4a$ e $Q'A = 8a$. Per la similitudine fra ADC e AQQ' $QQ' = \frac{1}{3}a$.

Quindi $A_{(AQQ')} = \frac{8}{3}a^2$ e $\frac{A_{(ABCD)}}{A_{(AQQ')}} = 78a^2 \frac{3}{8a^2} = 29,25$.

