

**SOLUZIONI II ALLENAMENTO REGIONALE TEMATICO
VENERDÌ 14 DICEMBRE 2018**

Quesito 1

Siano a, b due numeri interi primi tra loro tali che

$$\frac{a}{b} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \dots \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right)$$

quanto vale $a + b$?

Soluzione: Sviluppando l'espressione si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \dots \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right) = \\ &= \left(\frac{2^2 - 1}{2^2}\right) \cdot \left(\frac{3^2 - 1}{3^2}\right) \cdot \left(\frac{4^2 - 1}{4^2}\right) \cdot \dots \dots \dots \left(\frac{100^2 - 1}{100^2}\right) = \\ &= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \dots \dots \dots \frac{(100-1)(100+1)}{100^2} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \dots \dots 99 \cdot 101}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \dots \dots 100 \cdot 100} = \\ &= \frac{101}{2 \cdot 100} = \frac{101}{200} \end{aligned}$$

quindi $a = 101$ e $b = 200$ e la soluzione è $a + b = 301$.

Quesito 2

Indicate con x_1, x_2, x_3, x_4 le soluzioni dell'equazione $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$, quanto vale la somma dei reciproci delle soluzioni?

Soluzione: La somma dei reciproci delle radici vale:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{-a_1}{a_0} = 2$$

Quesito 3

Le radici dell'equazione $x^4 - 15x^3 + 70x^2 - 120x + m = 0$ sono in progressione geometrica. Quanto vale m ?

Soluzione: siano a, aq, aq^2, aq^3 le radici dell'equazione. Per le formule di Viete si avrà:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 + aq^3 = 15 \\ a^2q + a^2q^2 + a^2q^3 + a^2q^4 + a^2q^5 = 70 \\ a^3q^3 + a^3q^4 + a^3q^5 + a^3q^6 = 120 \\ a^4q^6 = m \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} a(1 + q + q^2 + q^3) = 15 \\ a^2q(1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4) = 70 \\ a^3q^3(1 + q + q^2 + q^3) = 120 \\ a^4q^6 = m \end{cases}$$

dalla prima equazione si ha:

$$(1 + q + q^2 + q^3) = \frac{15}{a}$$

e sostituendo nella terza si ha:

$$a^2q^3 = 8$$

elevando al quadrato abbiamo

$$a^4 q^6 = 64$$

quindi dall'ultima equazione

$$m = 64$$

Quesito 4

Si consideri la quaterna (x_1, x_2, x_3, x_4) di numeri interi positivi non maggiori di 200 e tali da formare una progressione aritmetica crescente. Quante sono le possibili quaterne?

Soluzione: siano $a, a+d, a+2d, a+3d$ i tre numeri in progressione aritmetica crescente: dovrà essere $a \geq 1$ e $1 \leq d \leq 66$.

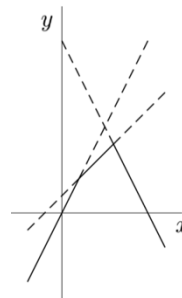
Scelto d , si avranno $200-3d$ modi per scegliere a .

Il numero dei modi in cui si possono scegliere sarà $\sum_{d=1}^{66} (200 - 3d) = 66 \cdot 200 - 3 \frac{66 \cdot 67}{2} = 6567$.

Quesito 5

Per ogni numero reale x , sia $m(x)$ il minimo tra i numeri $2x, x+1, 10-2x$. Il massimo valore di $m(x)$ è:

Soluzione Disegnate le rette di equazioni $y=2x, y=x+1$ e $y=10-2x$, si vede che il grafico corrispondente a $y=m(x)$ corrisponde alla spezzata in figura il cui punto di ordinata massima è evidentemente il punto di coordinate $(3,4)$.



Quesito 6

Sia $P(x)$ il polinomio che si ottiene da $(1+x)^{19} + x(1+x)^{18} + x^2(1+x)^{17} + \dots + x^{19}$ sviluppando i prodotti e sommando i termini simili. Determinare il coefficiente del suo termine di grado 16.

Soluzione Dato il polinomio:

$P(x) = (1+x)^{19} + x(1+x)^{18} + x^2(1+x)^{17} + \dots + x^{16}(1+x)^3 + x^{17}(1+x)^2 + x^{18}(1+x) + x^{19}$, osserviamo che dallo sviluppo di $x^{17}(1+x)^2 + x^{18}(1+x) + x^{19}$ non si ottengono termini di grado 16.

Invece, grazie alla formula del binomio di Newton, per ogni $k = 0, 1, 2, \dots, 16$, il termine di grado 16 di $x^k(1+x)^{19-k}$ è dato da $x^k \binom{19-k}{16-k} x^{16-k}$. Di conseguenza il suo coefficiente è $\binom{19-k}{16-k}$ che, grazie alle proprietà di simmetria dei coefficienti binomiali risulta essere uguale a $\binom{19-k}{3}$. Il

termine di grado 16 nello sviluppo di $P(x)$ è quindi dato da:

$$\binom{19-0}{3} + \binom{19-1}{3} + \binom{19-2}{3} + \dots + \binom{19-16}{3} = \binom{19}{3} + \binom{18}{3} + \binom{17}{3} + \dots + \binom{3}{3} = \binom{20}{4} = 4845$$

Quesito 7

Di una funzione $F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, si sa che $F(F(x)) = x+2$ e che $F(25) = 100$. Quanto vale $F(2018)$?

Soluzione Infatti se, partendo da 25, scriviamo in successione i numeri che si ottengono applicando la funzione F otteniamo: $25 \rightarrow 100 \rightarrow 27 \rightarrow 102 \rightarrow 29 \rightarrow 104 \rightarrow \dots$

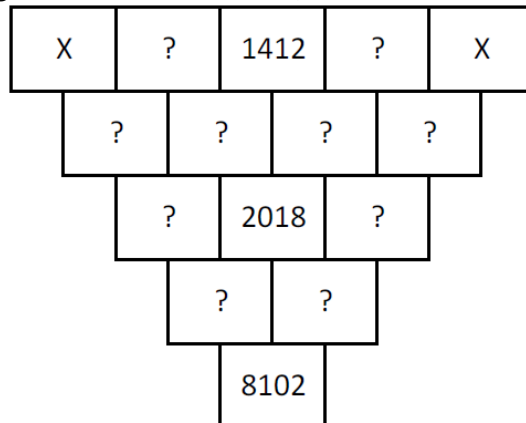
Quindi l'effetto di F sui numeri pari è quello di sottrarre 73. In conclusione, $F(2018) = 2018 - 73 = 1945$. Si osservi che l'applicazione di F ai numeri dispari aggiunge invece 75.

Quesito 8

Siano α, β, γ le radici del polinomio $x^3 - 6x^2 + 12x - 15$. Si determini un polinomio di terzo grado avente come radici $\alpha\beta, \beta\gamma, \alpha\gamma$. Dare come risultato il prodotto dei coefficienti del polinomio diviso 1000.

Soluzione Sia $x^3 + ax^2 + bx + c$ il polinomio richiesto. Dalle relazioni tra i coefficienti e le radici di un polinomio abbiamo $\alpha + \beta + \gamma = 6$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 12$, $\alpha\beta\gamma = 15$ da cui segue $a=-12, b=90$ e $c=-225$.

Nel seguente schema, partendo dagli elementi della prima riga, si costruiscono le righe successive inserendo in ciascuna casella la somma dei numeri contenuti nelle due caselle adiacenti della riga superiore (come avviene nel triangolo di Tartaglia). Si sa che il primo e l'ultimo elemento della prima riga sono uguali a X . Sono noti, inoltre, i tre numeri già scritti nello schema. Quanto vale X ?



Soluzione:

Indichiamo con A e B in numeri incogniti della prima riga e calcoliamo i valori delle caselle con i punti interrogativi.

È possibile dunque scrivere:

$$2018 = A + 1412 + 1412 + B$$

cioè $A+B=-806$.

Inoltre, si ha:

$$8102 = X + 2A + 3430 + 3430 + 2B + X$$

da cui $2X+2(A+B)=1242$.

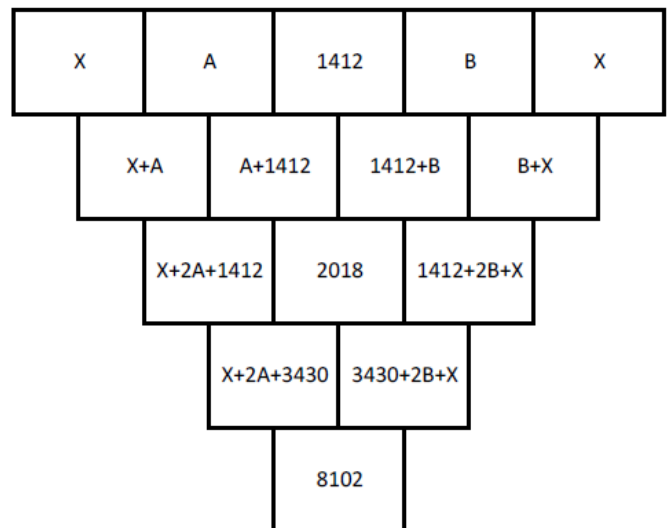
Sostituendo $A+B=-806$, otteniamo:

$$2X + 2(-806) = 1242$$

$$2X=1242+1612$$

$$2X=2854$$

X=1427.



Quesito 10

Togliendo il tappo dallo scarico di una vasca piena d'acqua, essa si svuota in 12 minuti.

Se il tappo viene tolto con la vasca piena ma col rubinetto aperto, il tempo necessario per svuotare la vasca è invece di 14 minuti.

Quanti secondi impiega la vasca, inizialmente vuota, a riempirsi col rubinetto aperto ed il tappo che chiude lo scarico?

Soluzione:

Osserviamo che, col rubinetto aperto, la vasca impiega 2 minuti in più a svuotarsi rispetto a quando è chiuso.

In quei 2 minuti, uscirà quindi dalla vasca la quantità d'acqua entrata nei 14 minuti in cui il rubinetto è rimasto aperto.

Possiamo quindi affermare che in 14 minuti entra nella vasca una quantità d'acqua che esce dallo scarico in 2 minuti.

Moltiplicando per 6 entrambi i tempi, otteniamo che in 84 minuti entra nella vasca la quantità d'acqua che esce dallo scarico in 12 minuti. Ma sappiamo che la quantità d'acqua che esce dallo scarico in 12 minuti corrisponde alla quantità d'acqua contenuta nella vasca piena.

Dunque il tempo necessario al rubinetto per riempire la vasca è proprio di 84 minuti pari a **5040** secondi.

Quesito 11

Siano dati tre numeri reali con le seguenti proprietà: la loro somma è 14, la somma dei loro reciproci è 12 e la somma dei loro quadrati è 2018. Quanto vale il valore assoluto del loro prodotto? Fornire come risposta la somma tra il numeratore e il denominatore della frazione ottenuta (dopo averla ridotta ai minimi termini).

Soluzione:

Indicando i numeri con a, b, c , consideriamo la formula del quadrato del trinomio:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ac + 2ab = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Ricaviamo } abc = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}.$$

$$\text{Sostituendo i dati del problema si ottiene: } abc = \frac{14^2 - 2018}{2 \cdot 12} = -\frac{1822}{24} = -\frac{911}{12}.$$

La soluzione è $911+12=923$.

Quesito 12

Dati due numeri reali x e y , determinare il minimo valore che può assumere la parte intera di

$$\left(\sqrt{x^2 + 14^2} + \sqrt{(y-x)^2 + 12^2} + \sqrt{(20-y)^2 + 18^2} \right)^2.$$

Soluzione:

Consideriamo nel piano cartesiano i seguenti punti:

$O(0,0)$, $A(x,14)$, $B(y,26)$, $C(20,44)$.

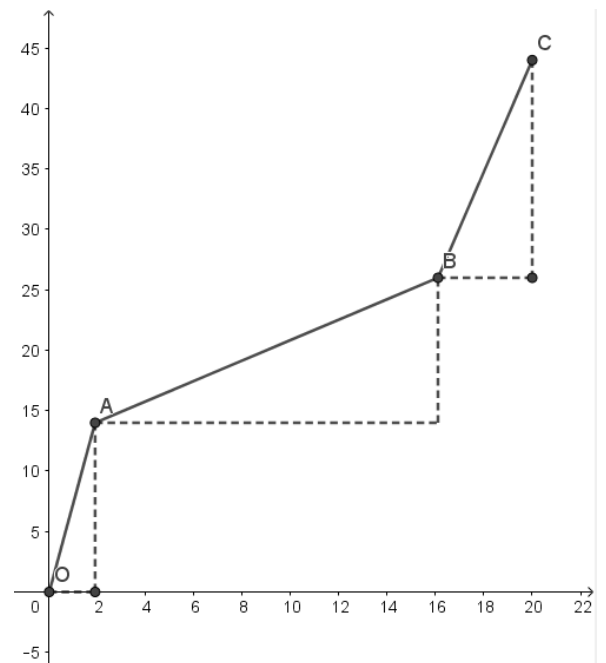
$$\text{Si ha: } \overline{OA} = \sqrt{x^2 + 14^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(y-x)^2 + (26-14)^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(20-y)^2 + (44-26)^2}$$

Dunque:

$$\left(\sqrt{x^2 + 14^2} + \sqrt{(y-x)^2 + 12^2} + \sqrt{(20-y)^2 + 18^2} \right)^2 = \left(\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} \right)^2.$$



Ma la lunghezza minima di $\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC}$ si ottiene quando i punti O, A, B, C sono allineati a formare il

segmento OC . La soluzione del problema è perciò $\overline{OC}^2 = 20^2 + 44^2 = 2336$.

Quesito 13

Calcolare il valore di $a = 7 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$. Fornire come risposta $a \cdot 1000$.

Soluzione: [7414] sia $a = 7 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$ = $5 + 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$, posto $x = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$ si

ha $5 + 2 + \frac{1}{x} = 5 + x$, da cui $2 + \frac{1}{x} = x$ cioè $x^2 - 2x - 1 = 0$ che ha come unica soluzione positiva

$x = 1 + \sqrt{2}$. Quindi $a = 5 + x = 5 + 1 + \sqrt{2} = 7,41423$, moltiplicando per 1000 e prendendo la parte intera del risultato si ha la risposta: 7414.

Quesito 14

Sia $f_1(x) = f(x) = x^2 + 4x + 2$ e per ogni numero naturale $n \geq 2$ sia $f_n(x) = f(f(\dots f(x)\dots))$ l'n-esima iterata della funzione f ; ad esempio per $n = 2$:

$$f_2(x) = f(f(x)) = f(x)^2 + 4f(x) + 2 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 14.$$

Calcolare il valore di $f_{2018}(8)$. Fornire come risposta le ultime 4 cifre del numero trovato (quelle più a destra).

Soluzione: [9998] si ha $f(x) = x^2 + 4x + 2 = (x+2)^2 - 2$ quindi iterando $f_2(x) = [f(x) + 2]^2 - 2 = \dots = (x+2)^{2^2} - 2$ e si dimostra facilmente per induzione che in genere si ha $f_n(x) = (x+2)^{2^n} - 2$ quindi $f_{2018}(8) = (8+2)^{2^{2018}} - 2 = 10^{2^{2018}} - 2 = 10\ldots 0000 - 2 = 9\ldots 9998$. Le 4 cifre più a destra sono 9998.

Quesito 15

Siano x, y numeri reali positivi, si consideri la funzione $f(x, y) = \min\left\{x, \frac{y}{x^2 + y^2}\right\}$, allora esistono due numeri positivi a, b tali che $f(x, y) \leq f(a, b)$ per ogni $x, y > 0$. Trovare il valore di $f(a, b)$. Fornire come risposta il valore di $\frac{1000}{f(a, b)}$.

Soluzione: [1414] se $x \leq \frac{y}{x^2 + y^2}$ allora $x \leq \frac{y}{x^2 + y^2} \leq \frac{y}{2xy} = \frac{1}{2x}$ (essendo $x^2 + y^2 \geq 2xy$ poiché $0 \leq (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$) cioè $x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. In questo caso $f(x, y) = x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Se invece si ha $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ allora $\frac{y}{x^2 + y^2} \leq \frac{y}{2xy} = \frac{1}{2x} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi in questo caso $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. In ogni circostanza si ha: $f(x, y) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ed anche $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La risposta dunque è $1000 : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1414,23$, la cui parte intera è 1414.

Quesito 16

Siano x, y, z numeri reali positivi sottoposti al vincolo $x + 2y + 3z = 1$, qual è il valore massimo che può assumere l'espressione xyz ? Fornire come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione trovata ridotta ai minimi termini.

Soluzione: [0163] scriviamo $xyz = \frac{x \cdot 2y \cdot 3z}{6} = \frac{xst}{6}$ ($s = 2y$ e $t = 3z$) con $x + s + t = 1$. Grazie alla disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica ($MA \geq MG$) si ha: $xyz = \frac{xst}{6} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{x+s+t}{3}\right)^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{162}$. La risposta è dunque $1+162=163$.

Quesito 17

Trovare il valore della somma $S = \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i + 2}{\alpha_i^3 - 2\alpha_i^2 - \alpha_i + 2}$ sapendo che, per ogni $i = 1, \dots, 4$, α_i è radice del polinomio $p(x) = x^4 + x^3 - 12x^2 - 2x + 9$. Se $S = \frac{m}{n}$, con m ed n primi fra loro, dare come risultato $m-n$.

Se α è radice di $p(x)$ allora $\alpha^4 + \alpha^3 - 12\alpha^2 - 2\alpha + 9 = 0$ quindi $\alpha^4 + \alpha^3 - 12\alpha^2 - \alpha + 11 = \alpha + 2$ pertanto

$$\frac{\alpha + 2}{\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 2} = \frac{\alpha^4 + \alpha^3 - 12\alpha^2 - \alpha + 11}{\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 2} = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2 + \alpha - 11)}{(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha-2)} = \frac{(\alpha^2 + \alpha - 11)}{(\alpha-2)} = \alpha + 3 - \frac{5}{\alpha-2}.$$

$$\text{Pertanto } S = \sum_{i=1}^4 \left(\alpha_i + 3 - \frac{5}{\alpha_i - 2}\right) = 12 + \sum_{i=1}^4 \alpha_i - 5 \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\alpha_i - 2} = 12 - 1 - 5 \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\alpha_i - 2}$$

(per le formule di Viete la somma $\sum_{i=1}^4 \alpha_i$ delle radici di $p(x)$ è -1).

$$\text{Sia } q(x) = p(x+2) = (x+2)^4 + (x+2)^3 - 12(x+2)^2 - 2(x+2) + 9 = x^4 + 9x^3 + 18x^2 - 6x - 19.$$

$p(\alpha)=0 \Rightarrow q(\alpha-2)=p(\alpha-2+2)=p(\alpha)=0 \Rightarrow (\alpha-2)$ è radice di $q(x)$. Si osserva quindi che $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\alpha_i-2}$ è la somma degli inversi delle radici di $q(x)$ e vale pertanto $-\frac{a_1}{a_0}$, con a_1 ed a_0 coefficienti di $q(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Quindi $S = 12 - 1 - 5 \left(-\frac{6}{19}\right) = 11 + \frac{30}{19} = \frac{239}{19}$ e la risposta al quesito è dunque $239 - 19 = 220$.

Quesito 18

Trovare le ultime 4 cifre della parte intera del prodotto delle soluzioni dell'equazione $\pi x^{\log_{2018} x} = x^{17}$.

SOLUZIONE

Facendo il logaritmo in base 2018 di ambo i membri si ha

$$\log_{2018}(\pi x^{\log_{2018} x}) = \log_{2018} x^{17}; \log_{2018} \pi + \log_{2018}(x^{\log_{2018} x}) = 17 \log_{2018} x;$$

$$\log_{2018} \pi + \log_{2018} x \log_{2018} x = 17 \log_{2018} x; (\log_{2018} x)^2 - 17 \log_{2018} x + \log_{2018} \pi = 0.$$

Posto $y = \log_{2018} x$ si ha $y^2 - 17y + \log_{2018} \pi = 0$. $\Delta = 289 - 4 \log_{2018} \pi > 0$ (essendo

$\log_{2018} \pi < 1$) pertanto $y^2 - 17y + \log_{2018} \pi = 0$ ammette soluzioni reali che indichiamo con

y_1 e y_2 . Avendo posto $y = \log_{2018} x$ si ha che le soluzioni dell'equazione del testo sono

$x_1 = 2018^{y_1}$ e $x_2 = 2018^{y_2}$. Per rispondere al quesito iniziale dobbiamo andare a considerare

$x_1 \cdot x_2 = 2018^{y_1} \cdot 2018^{y_2} = 2018^{y_1+y_2} = 2018^{17}$ (per la relazione radici-coefficienti

dell'equazione di secondo grado in y scritta sopra). $2018^{17} = 2018 \cdot 2018^{16} = 2018 \cdot$

$((2018^2)^2)^2 \equiv_{10000} 2018 \cdot ((2324)^2)^2 \equiv_{10000} 2018 \cdot ((0976)^2)^2 \equiv_{10000} 2018 \cdot$

$(2576)^2 \equiv_{10000} 2018 \cdot 5776 \equiv_{10000} 5968$. La risposta al quesito è quindi 5968.

Quesito 19

Determinare la somma di m e delle radici del polinomio $p(x) = x^4 + 15x^3 - 270x^2 - 1080x + m$ sapendo che le radici costituiscono una progressione geometrica avente per termine iniziale un divisore primo di m .

SOLUZIONE

Siano $\delta, \delta q, \delta q^2, \delta q^3$ le radici di $p(x)$. Per le formule di Viete

$$\begin{cases} \delta + \delta q + \delta q^2 + \delta q^3 = -15 \\ \delta^2 q + \delta^2 q^2 + \delta^2 q^3 + \delta^2 q^4 + \delta^2 q^5 = -270 \\ \delta^3 q^3 + \delta^3 q^5 + \delta^3 q^4 + \delta^3 q^6 = 1080 \\ \delta^4 q^6 = m \end{cases} \quad \begin{cases} \delta(1 + q + q^2 + q^3) = -15 \\ \delta^3 q^3(1 + q + q^2 + q^3) = 1080 \\ \delta^4 q^6 = m \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione nella terza si ha $-15 \delta^2 q^3 = 1080$ da cui $\delta^2 q^3 = -72$ e quindi, considerando la quarta equazione, $m = \delta^4 q^6 = 5184$. Si ha dunque $p(x) = x^4 + 15x^3 - 270x^2 - 1080x + 5184$. $5184 = 2^6 \cdot 3^4$. Poiché $p(2) \neq 0$ e $p(3) = 0$ si ha $\delta \equiv 3$ e $1 + q + q^2 + q^3 = -5$, quindi $q = -2$ e le radici di $p(x)$ sono 3, -6, 12, -24 quindi la risposta al quesito è $3 - 6 + 12 - 24 + 5184 = 5169$.

Quesito 20

Detta $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione suriettiva tale che $f(f(y)-x) + (3xy^3 - 3x^2) f(y) = (f(y))^3 - x^3$, determinare $f(11) - 97$.

SOLUZIONE

Dal momento che la funzione è suriettiva esiste un numero y reale tale che $f(y)=0$. Sostituendo

nell'equazione del testo $f(y)=0$ si ha: $f(-x) = -x^3$ da cui $f(x) = x^3$. Si può verificare che $f(x) = x^3$ è

soluzione dell'equazione di partenza. Infatti: $(y^3-x)^3 + 3xy^6 - 3x^2y^3 = y^9 + x^3$; $y^9 - 3y^6x + 3x^2y^3 - x^3 +$

$3xy^6 - 3x^2y^3 = y^9 - x^3$; $0=0$. Pertanto $f(x) = x^3$ è la funzione cercata e $f(11) - 97 = 11^3 - 97 = 1331 -$

$97 = 1234$.