

Probabilità

Cominciamo dando una definizione operativa di probabilità.

Definizione: Si dice *probabilità* di un evento X il rapporto $p(X)$ fra il numero di *casi favorevoli* e il numero di *casi possibili*, nell'ipotesi che i casi possibili siano tutti equiprobabili.

Si nota subito che, per qualsiasi evento X , dev'essere

$$0 \leq p(X) \leq 1$$

Questa definizione può giustamente suscitare molte perplessità, in quanto, per definire il concetto di "probabilità", assume il concetto di "equiprobabilità". Una definizione rigorosa e al tempo stesso operativa del concetto di probabilità, lungi dall'essere banale, ha interessato nei secoli molti matematici; noi qui non ci occuperemo di tali questioni e ci limiteremo a studiare casi in cui il concetto intuitivo di "equiprobabilità" sia ragionevolmente chiaro ed applicabile.

Esempio 1. *Calcolare la probabilità che, lanciando un dado a sei facce, esca un multiplo di 3.*

È ragionevole assumere che, se il dado non è truccato, tutti e sei i possibili risultati di un tale lancio siano equiprobabili. Essendo poi due i multipli di 3 presenti sulle facce di un dado (3 e 6), la probabilità di questo evento è:

$$p(X) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

□

Nell'esempio precedente, il fatto che esca un multiplo di 3 si chiama *evento*, mentre i singoli "casi possibili" (equiprobabili) che concorrono o meno al verificarsi di un evento sono detti *eventi elementari*.

Date queste definizioni, un approccio insiemistico alla trattazione della teoria della probabilità diventa naturale.

Un evento diventa quindi un'unione di eventi elementari.

Chiaramente, oltre all'unione di eventi, possiamo definire l'intersezione di eventi e il complementare di un evento.

Esempio 2. Calcolare la probabilità che, lanciando due dadi, si ottenga come somma 7.

In questo tipo di problemi sorge spesso un dubbio. Per esempio, il lancio che mi fa ottenere 3 in quello che chiameremo il "primo dado" e 4 nel "secondo dado" e il lancio che mi fa ottenere 4 nel primo e 3 nel secondo, nell'idea che normalmente i due dadi vengono lanciati contemporaneamente (e sono in realtà indistinguibili), sono due eventi elementari distinti?

Generalmente, salvo diverse specificazioni, la risposta è sì. Per questo motivo, a scanso di equivoci è spesso utile matematizzare la situazione dando una scansione "temporale" al problema, in questo caso immaginando di lanciare prima un dado e poi l'altro.

Detto questo, i casi possibili nel lancio di due dadi sono 36, corrispondenti alle coppie ordinate di numeri compresi fra 1 e 6. I casi favorevoli sono invece le coppie (1,6) e (6,1). Quindi la risposta è:

$$p(X) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

□

Analizzando nel dettaglio gli esempi precedenti, si può notare che ad un'unione di eventi elementari corrispondeva sempre una somma di probabilità (nell'esempio 2 la probabilità totale era la somma delle probabilità di ottenere (1,6) e (6,1): $\frac{1}{36} + \frac{1}{36}$).

Nel caso in cui si considerino diversi eventi non elementari, questa regola continua a valere solo nel caso di eventi (insiemisticamente) *disgiunti*, cioè nel caso in cui $A \cap B = \emptyset$. In tal caso, si ha sempre

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Più in generale, si ha invece

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Come calcolare la probabilità di un'intersezione?

Se gli eventi sono *indipendenti*, cioè nel caso in cui il verificarsi o meno di un evento non influenzi l'altro, si ha

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Questo tipo di formula vale anche se i due eventi non sono indipendenti, ma in questo caso (diciamo per esempio che si verifichi prima l'evento A e poi

l'evento B), anziché utilizzare $p(B)$, bisognerà utilizzare $p(B|A)$, che si legge "*p di B condizionato A*" ed è la probabilità che succeda B , supposto che sia già successo A . Si ha dunque

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Esempio 3. Lanciamo un dado e consideriamo i tre eventi A ="Esce un numero pari", B ="Esce il numero 2" e C ="Esce un multiplo di 3". È facile verificare che si ha $p(A|B) = 1$, $p(B|A) = 1/3$, $p(A|C) = 1/2$, $p(C|A) = 1/3$, $p(B|C) = p(C|B) = 0$.

□

Esercizi

1. Qual è la probabilità che un fattore positivo di 60 sia minore di 7?
2. Vengono lanciati due dadi regolari, uno a sei facce e uno a otto facce (coi numeri da 1 a 8). Qual è la probabilità che il prodotto dei due lanci sia multiplo di 6?
3. Da unurna contenente 6 palline bianche e 9 blu, se ne estraggono 2 contemporaneamente. Calcolare la probabilità che le due palline siano entrambe bianche.
4. Qual è la probabilità che il primo numero del lotto estratto sulla ruota di Roma sia un numero dispari o un multiplo di 18?
5. Si lanciano due dadi regolari a sei facce. Qual è la probabilità che escano due numeri uguali?
6. In un contenitore ci sono 100 matite di cui 12 difettose. Si scelgono a caso 4 matite. Calcolare la probabilità di trovarne almeno una funzionante.
7. Un sacchetto contiene 21 palline con le lettere dell'alfabeto italiano. Se ne estraggono contemporaneamente 4. Calcolare la probabilità di trovare le lettere per comporre la parola "Elio".
8. Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte. Qual è la probabilità di estrarre una figura, nell'ipotesi di aver estratto una carta di cuori?
9. Lanciati due dadi regolari, qual è la probabilità che la somma delle dieci facce visibili sia divisibile per 35?
10. Si pescano tre carte da un mazzo da 40. Qual è la probabilità di pescare esattamente tre assi?

Risoluzioni

1. I fattori positivi di 60 sono $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. I casi possibili sono 12, i casi favorevoli 6. Risposta: $6/12=1/2$.
2. Calcoliamo questa probabilità sommando vari casi a seconda di ciò che esce nel dado a sei facce.
Se nel dado a sei facce esce un 6 (probabilità $1/6$), nel dado a otto facce può uscire qualsiasi cosa (probabilità 1). La probabilità totale di questo evento è $1/6 \cdot 1 = 1/6$. Se nel primo esce un 5 o un 1 ($1/3$), nel secondo deve uscire un 6 ($1/8$). Se nel primo esce un 4 o un 2 ($1/3$), nel secondo deve uscire un 3 o un 6 ($1/4$). Se nel primo esce un 3 ($1/6$), nel secondo deve uscire un pari ($1/2$). In definitiva la probabilità totale è $\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{8}$.
3. I casi possibili sono tutte le combinazioni di 2 oggetti presi da un insieme di 15 oggetti (per convincercene, possiamo numerare le palline da 1 a 15), quindi $\binom{15}{2}$. I casi favorevoli sono invece tutte le combinazioni di 2 oggetti presi da un insieme di 6, quindi $\binom{6}{2}$. La probabilità cercata è dunque $\binom{6}{2} / \binom{15}{2} = \frac{6 \cdot 5}{15 \cdot 14} = \frac{1}{7}$.
4. Detti A="estrazione del lotto dispari" e B="estrazione del lotto multipla di 18", si ha: $p(A) = 1/2$, $p(B) = [90/18]/90 = 5/90 = 1/18$, dove $[a]$ è la parte intera di a , e $p(A \cap B) = 0$, perché i due eventi sono mutuamente esclusivi. In definitiva, la probabilità richiesta è $1/2 + 1/18 = 10/18 = 5/9$.
5. Per rispondere si può pensare di fissare il risultato di un lancio e calcolare la probabilità che l'altro sia uguale al primo ($1/6$), oppure contare quanti casi favorevoli ci sono (uno per ogni numero da 1 a 6) e quanti casi possibili (36), arrivando comunque a $6/36=1/6$.
6. Qui conviene calcolare la probabilità del complementare, che consiste nel pescare quattro matite difettose. Questa è $\bar{p} = \frac{12}{100} \cdot \frac{11}{99} \cdot \frac{10}{98} \cdot \frac{9}{97}$. La probabilità cercata è quindi $p = 1 - \bar{p}$.
7. Possiamo calcolare, per esempio, la probabilità di pescare prima la "E", poi la "L", poi la "I" e infine la "O", ottenendo $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{17}$ e poi moltiplicare il risultato per il numero di permutazioni delle lettere cercate, cioè $4!$.

8. È chiaramente una probabilità condizionata. La probabilità dell'intersezione fra i due eventi è $3/40$ (pari al numero di figure di cuori), la probabilità dell'evento noto è $1/4$ (percentuale di cuori nel mazzo), quindi la probabilità cercata è $\frac{3/40}{1/4} = \frac{3}{10}$. In realtà in questo caso era semplice calcolare direttamente il risultato come probabilità di ottenere una figura pescando fra le 10 carte di cuori.
9. Calcoliamo la somma di tutte le facce dei due dadi: si ottiene facilmente 42. È chiaro che l'unico multiplo di 35 candidabile è esattamente 35 e si ottiene se le due facce poggiate sul tavolo hanno somma 7. E questo accade con 6 coppie, come si vede facilmente. La risposta è dunque $6/36=1/6$.
10. Questa si calcola facilmente come $\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$.

Problemi gara tematica 2014

1. In una classe di 15 studenti l'insegnante sceglie quattro persone a caso per farle partecipare ai Giochi di Archimede. Qual è la probabilità che tra queste quattro persone ci siano almeno due dei tre studenti più bravi in matematica? Scrivere questa probabilità come frazione ridotta ai minimi termini e dare come risultato il numeratore elevato al denominatore.

[8192]

Risoluzione. I gruppi di 4 persone che comprendono i 3 studenti più bravi sono 12 (bisogna solo scegliere il quarto studente), mentre i gruppi che comprendono esattamente 2 dei 3 studenti più bravi sono $\binom{3}{2} \cdot \binom{12}{2}$ (si devono scegliere 2 studenti tra i 3 più bravi e 2 tra i 12 meno bravi). I gruppi possibili sono invece $\binom{15}{4}$. La probabilità cercata è quindi:

$$\frac{12 + \binom{3}{2} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{15}{4}} = \frac{2}{13}.$$

2. In un gioco a premi giocato lanciando un dado a sei facce la regola è la seguente: se esce il numero 1 o il 3, il montepremi raddoppia; se esce uno degli altri numeri, il montepremi si dimezza. Considerando che il montepremi iniziale è di 512 euro, qual è la probabilità che dopo dieci lanci il montepremi sia tornato di nuovo al valore iniziale? Scrivere questa probabilità come frazione ridotta ai minimi termini e dare come risultato la somma di denominatore e numeratore.

[7457]

Risoluzione. Vogliamo determinare la probabilità che ci siano stati 5 raddoppi e 5 dimezzamenti. La probabilità di un raddoppio è $1/3$, mentre la probabilità di un dimezzamento è $2/3$. Le sequenze di 5 raddoppi e 5 dimezzamenti sono $\binom{10}{5}$, quindi la probabilità richiesta è $\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{896}{6561}$.

3. Quattro persone siedono attorno ad un tavolo circolare. Ognuna tira un dado. Qual è la probabilità che per ogni coppia di persone adiacenti, queste non abbiano ottenuto lo stesso numero? Scrivere questa probabilità come frazione ridotta ai minimi termini e dare come risultato la somma di denominatore e numeratore.

[0107]

Risoluzione. Chiamiamo A, B, C e D (andando in senso orario) le quattro persone. Fissiamo il risultato ottenuto a A. Se B e D ottengono lo

stesso risultato (cinque output con probabilità, ciascuno, $(1/6)^2$), è sufficiente che C abbia un risultato diverso dal loro (probabilità $5/6$). Se invece B e D ottengono un risultato diverso (probabilità $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6}$), la probabilità che C abbia un output diverso da entrambi diventa $4/6$. Totale: $5 \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{35}{72}$.

4. Tre fratelli vanno al campo sportivo per fare una partita di calcio con altri 19 amici. Tenuto conto che la formazione delle squadre viene sorteggiata, qual è la probabilità che i tre fratelli giochino la partita nella stessa squadra? Scrivere questa probabilità come frazione ridotta ai minimi termini e dare come risultato il denominatore elevato al numeratore.

[2744]

Risoluzione. Assegnato il primo fratello a una squadra, il secondo ha 10 possibilità su 21 di essere inserito nella stessa squadra. Se ciò accade, il terzo ha 9 possibilità su 20 di seguire i primi due. $p_{tot} = \frac{10}{21} \cdot \frac{9}{20} = \frac{3}{14}$.

5. Attilio gioca con un dado e un orologio (fermo) che all'inizio segna le 12. Per 2014 volte tira il dado e porta le lancette avanti di tante ore quanto è il risultato. Qual è alla fine la probabilità che la lancetta delle ore sia orizzontale? Scrivere questa probabilità come frazione ridotta ai minimi termini e dare come risultato il denominatore elevato al numeratore.

[0006]

Risoluzione. In qualsiasi posizione si trovi la lancetta, c'è esattamente un risultato del dado che la porta ad essere orizzontale. Quindi, indipendentemente dai risultati dei primi 2013 lanci, alla fine la lancetta è orizzontale con probabilità $\frac{1}{6}$.