

Polinomi

Definizione: un **polinomio** è una scrittura del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

In questa dispensa si danno per assodate le nozioni di *coefficienti* di un polinomio, *radici* di un polinomio, *polinomio monico*, *grado* di un polinomio, somma e prodotto fra polinomi e comportamento del grado rispetto a queste operazioni.

Osservazione: per identificare univocamente un polinomio $p(x)$ di grado n in una variabile, è sufficiente conoscere $n + 1$ punti del piano cartesiano per i quali passa la corrispondente *funzione polinomiale* $y = p(x)$.

Divisione euclidea: dati due polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ (di grado $\deg(p_2(x)) > 0$), esistono (unici) altri due polinomi $q(x)$ ed $r(x)$ (con $\deg(r(x)) < \deg(p_2(x))$) tali che

$$p_1(x) = p_2(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Osservazione: Se $p_1(x)$ e $p_2(x)$ sono a coefficienti interi, non necessariamente lo sono anche $q(x)$ ed $r(x)$, a meno che $p_2(x)$ non sia monico.

Teorema di Bezout: dato un *massimo comun divisore* $d(x)$ di due polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$, esistono (al solito non unici) altri due polinomi $m_1(x)$ ed $m_2(x)$ tali che

$$m_1(x)p_1(x) + m_2(x)p_2(x) = d(x)$$

Nota: il m.c.d. di due polinomi è unico a meno di costanti moltiplicative. Il procedimento per calcolare $m_1(x)$ ed $m_2(x)$ è del tutto analogo a quello utilizzato per i numeri interi.

Teorema del resto. Se nella divisione euclidea sopra definita $p_2(x)$ è un polinomio monico di grado 1 ($p_2(x) = x - \alpha$), allora il resto della divisione è $r = p_1(\alpha)$. Si ha dunque:

$$p_1(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + p_1(\alpha)$$

Quindi se $p(\alpha) = 0$, la divisione è esatta.

Corollario (molto usato nelle gare olimpiche): Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi, e siano a e b due interi. Allora

$$(a - b) | (p(a) - p(b))$$

dove " $|$ " significa "divide".

Fattorizzazione di un polinomio sui reali. Ogni polinomio si può fattorizzare in polinomi irriducibili (sui reali) di primo e secondo grado.

Osservazione 1: Ogni polinomio di grado dispari ammette almeno una radice reale.

Osservazione 2: In realtà ogni polinomio di grado n ammette n radici, solo che non necessariamente sono reali. Per poter trovare tutte le radici di un polinomio, in generale bisogna estendere i reali al campo dei numeri complessi, ma noi non tratteremo qui questo argomento.

Radici razionali di un polinomio a coefficienti interi. Se $\alpha = m/n$ è una radice razionale (ridotta ai minimi termini) di un polinomio $p(x)$, allora $m|a_0$ e $n|a_n$.

Cenni sui polinomi simmetrici. Dato un polinomio monico $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ e date le sue n radici $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (eventualmente complesse ed eventualmente non distinte), si ha:

$$\begin{aligned}a_{n-1} &= - \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \\a_{n-2} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \\a_{n-3} &= - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \\&\vdots \\a_0 &= (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n\end{aligned}$$

Le formule a destra dei segni di uguaglianza formano una base per tutti i polinomi simmetrici in n variabili, nel senso che qualsiasi polinomio simmetrico in n variabili $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ può essere scritto come combinazione (somme e prodotti) di quei polinomi.

Esempio: Dato il polinomio $x^3 - 5x^2 + 8x - 3$ e dette λ_1, λ_2 e λ_3 le sue radici, calcolare $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3$.