

Triangoli

Si elencano alcune nozioni date per scontate: triangolo, vertici, lati, angoli (interni, adiacenti a un lato, opposti a un lato), perimetro, area, triangoli acutangoli, ottusangoli, rettangoli, cateti, ipotenusa, triangoli scaleni, isosceli, equilateri, somma degli angoli interni, altezze, mediane, bisettrici, assi.

Criteri di congruenza.

Due triangoli sono congruenti se ricadono in uno dei seguenti casi:

- hanno due lati e l'angolo compreso congruenti (I criterio);
- hanno un lato e i due angoli adiacenti congruenti (II criterio);
- hanno tre lati congruenti (III criterio).

Criteri di similitudine.

Due triangoli sono simili se ricadono in uno dei seguenti casi:

- hanno tre angoli congruenti;
- hanno tre lati in proporzione;
- hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso congruente.

Un triangolo è isoscele se almeno due fra altezza, mediana e bisettrice corrispondenti a un angolo coincidono (questo criterio di verifica va naturalmente ad aggiungersi agli altri criteri classici).

Teoremi di Euclide.

In un triangolo rettangolo in A, con altezza AH rispetto all'ipotenusa:

- un cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa: $AB^2 = BC \cdot BH$;
- l'altezza è media proporzionale fra le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa: $AH^2 = BH \cdot CH$.

Teorema di Pitagora.

In un triangolo rettangolo in A, il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Terne pitagoriche.

Sono terne di numeri interi che sono lunghezze di lati di triangoli rettangoli. Le cosiddette terne primitive sono tutte le terne di numeri a, b, c tali che: $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$ al variare di m e n in $\mathbb{N}$, con $m > n$. Tutte le altre terne si ottengono moltiplicando gli elementi delle terne primitive per numeri naturali qualsiasi.

Punti notevoli di un triangolo

Le mediane s'incontrano in un punto (sempre interno) detto *baricentro*, che divide ognuna di esse in due parti, di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

Le bisettrici s'incontrano in un punto (sempre interno) detto *incentro*, centro della circonferenza inscritta nel triangolo. Il raggio della circonferenza inscritta è dato da $r = \frac{S}{p}$, dove S è l'area e p

è il semiperimetro. Detto D il punto in cui la bisettrice incontra il lato opposto al vertice A, essa lo divide in due parti proporzionali agli altri lati: $BD : DC = AB : AC$.

Le altezze s'incontrano in un punto detto *ortocentro* (esterno se il triangolo è ottusangolo, su un vertice se rettangolo) e sono sempre parallele agli assi.

Gli assi s'incontrano in un punto (esterno se il triangolo è ottusangolo, sull'ipotenusa se rettangolo) detto *circocentro*, il quale è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. Il

raggio della circonferenza circoscritta è dato da $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$, dove a, b e c sono le misure dei tre

lati e S è l'area del triangolo.

Retta di Eulero.

Ortocentro H, baricentro B e circocentro O di un triangolo giacciono sempre su una stessa retta. Inoltre, si ha $HG = 2GO$.

Formula di Erone.

Note le misure a, b e c dei tre lati di un triangolo e detto p il semiperimetro, l'area è uguale a:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

POLIGONI – QUADRILATERI

Definizioni Un poligono si dice

- equilatero se ha tutti i lati uguali
- equiangolo se ha tutti gli angoli uguali
- regolare se è contemporaneamente equiangolo ed equilatero.

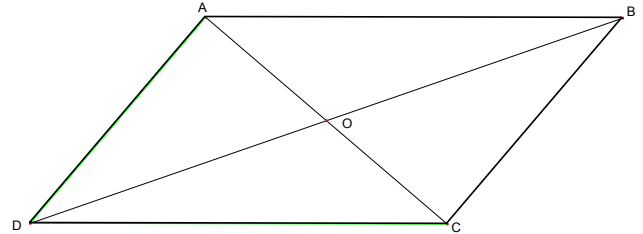
Osservazione: per i triangoli sono fatti equivalenti essere equilateri o equiangoli, per i poligoni con un numero di lati maggiore o uguale a 4 tale equivalenza non vale.

Teorema La somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è uguale a $(n - 2)$ angoli piatti.

PARALLELOGRAMMI

Per un quadrilatero convesso le seguenti proprietà sono equivalenti:

- i lati opposti sono a due a due paralleli
- gli angoli opposti sono a due a due uguali
- i lati opposti sono a due a due uguali
- tutte le coppie di angoli consecutivi sono supplementari
- il poligono è diviso da ogni diagonale in due triangoli congruenti
- le diagonali si dimezzano scambievolmente.



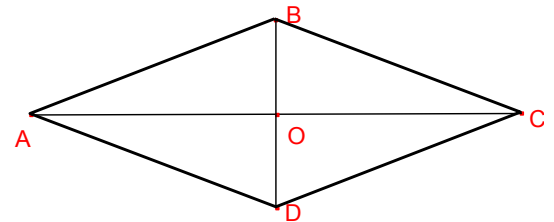
Un quadrilatero che verifica una qualunque di queste proprietà (dunque le verifica tutte) si dice *parallelogrammo*.

ROMBI

Per un parallelogrammo le seguenti proprietà sono equivalenti:

- i lati sono congruenti
- le diagonali sono perpendicolari
- almeno una diagonale è bisettrice degli angoli interni per i cui vertici passa.

Un parallelogrammo che verifica una qualunque di queste proprietà (dunque le verifica tutte) si dice *rombo*.

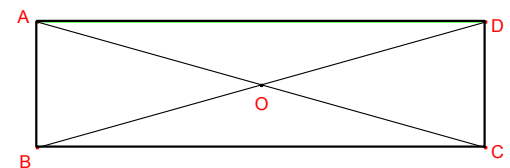


RETTANGOLI

Per un parallelogrammo le seguenti proprietà sono equivalenti:

- tutti gli angoli sono congruenti
- le diagonali sono congruenti

Un parallelogrammo che verifica una qualunque di queste proprietà (dunque le verifica tutte) si dice *rettangolo*.



POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI

Definizione Un quadrilatero si dice circoscritto se esiste una circonferenza contenuta nel quadrilatero e tangente a tutti i lati.

Teorema In un quadrilatero circoscritto a una circonferenza, la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

Definizione Un quadrilatero ABCD si dice inscritto o ciclico se i suoi vertici appartengono a una circonferenza.

Teorema In un quadrilatero non intrecciato inscritto in una circonferenza (cioè ciclico), gli angoli opposti sono supplementari (cioè la somma degli angoli opposti è 180°).

Teorema Ogni poligono regolare è inscrittibile e circoscrittibile.

Formula di Erone per l'area di un quadrilatero ciclico

Dato un quadrilatero ciclico, indicate con a, b, c, d , le lunghezze dei lati e con $p = (a+b+c+d)/2$ il semiperimetro, si ha che

$$\text{Area quadrilatero} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Uguaglianza di Tolomeo

Siano ABCD punti presi nell'ordine su una circonferenza G , cioè tali che il quadrilatero ABCD sia ciclico e non intrecciato. Allora

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Disuguaglianza di Tolomeo

Siano ABCD quattro punti del piano. Allora

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$$

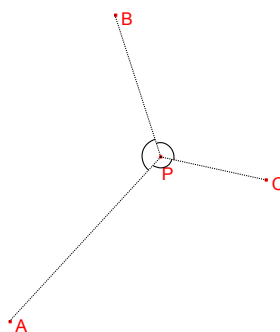
Inoltre vale il segno di uguale se e solo se i quattro punti formano un quadrilatero ciclico non intrecciato.

Problema di Steiner con i tre punti

Siano A, B, C tre punti del piano non allineati. Il problema di Steiner consiste nel determinare un punto P del piano per cui è minima la somma $AP+BP+CP$.

Soluzione del problema di Steiner

Il punto P esiste ed è l'unico punto del piano tale che $\hat{APB} = \hat{BPC} = \hat{CPA} = 120^\circ$



IL TEOREMA DI CEVA

Definizione 1

Un segmento che congiunge un vertice di un triangolo con un punto qualsiasi del lato opposto è detto segmento ceviano.

Definizione 2

Tre rette o segmenti sono concorrenti se passano per lo stesso punto.

In base a queste posizioni, se P, Q, R sono punti appartenenti rispettivamente ai lati AB, BC, CA del triangolo ABC , i segmenti AQ, BR e CP sono ceviani. In particolare nella [figura 1](#) i tre segmenti sono stati disegnati *concorrenti* nello stesso punto S , intersezione

di AQ e BR (di conseguenza, solo i vertici del triangolo e i punti Q e R possono essere trascinati liberamente).

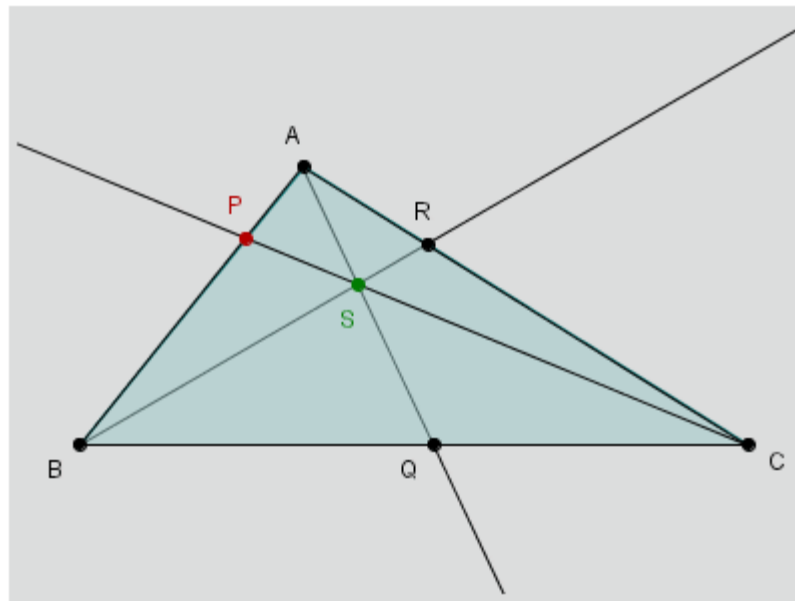


figura 1

In tale situazione si può dimostrare l'interessante teorema del matematico [Giovanni Ceva](#).

Teorema di Ceva.

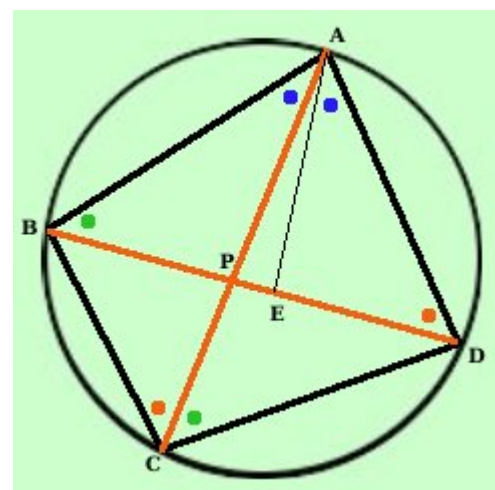
Se i tre segmenti ceviani AQ , BR e CP del triangolo ABC sono concorrenti, allora risulta

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

Teorema di Tolomeo

Per ogni quadrilatero ciclico (inscritto in una circonferenza) la somma dei prodotti delle misure dei lati opposti è uguale al prodotto della misura delle due diagonali

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

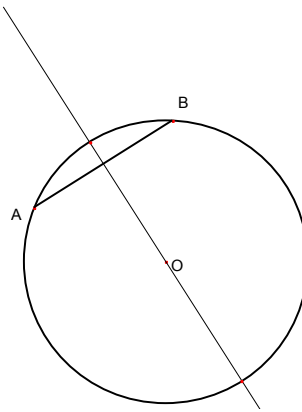


CIRCONFERENZA E CERCHIO

Definizione Sia C un punto del piano, sia r un numero reale >0 . Si dice **circonferenza** il luogo dei punti del piano la cui distanza da C è r . Si dice **cerchio** il luogo dei punti del piano la cui distanza da C è minore o uguale a r .

Definizioni Una corda è un qualunque segmento che unisce due punti di una circonferenza. Un diametro è una qualunque corda che passa per il centro. Un raggio è un segmento che unisce il centro con un punto della circonferenza.

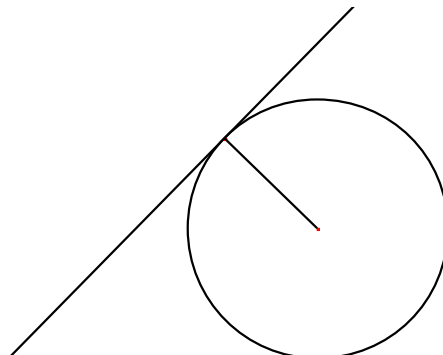
Teorema L'asse di una corda passa per il centro della circonferenza e dimezza l'angolo al centro e l'arco corrispondenti.



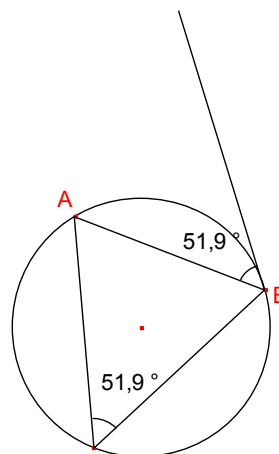
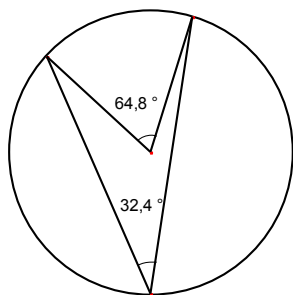
Corollario La perpendicolare condotta dal centro di una circonferenza a una sua corda, dimezza la corda, l'angolo al centro e l'arco corrispondenti.

Teorema Per tre punti non allineati passa sempre una circonferenza e una sola.

Teorema Se una retta è tangente a una circonferenza, il raggio che ha un estremo nel punto di contatto è perpendicolare alla tangente.



Teorema Ogni angolo alla circonferenza è congruente alla metà del corrispondente angolo al centro (cioè che insistono sullo stesso arco). In particolare tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti.

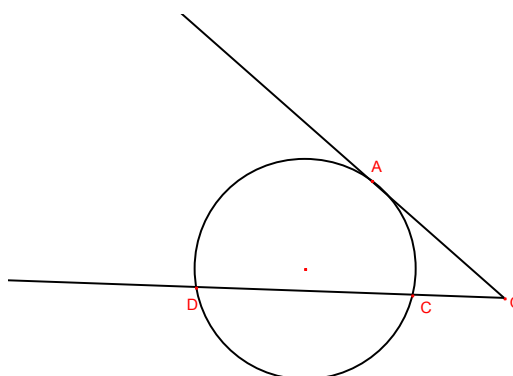
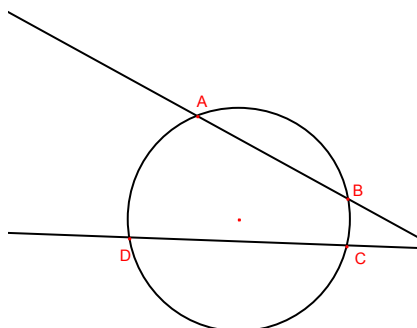


Posizione limite dell'angolo alla circonferenza L'angolo formato da una corda AB e dalla semiretta tangente in B alla circonferenza può essere pensato come posizione limite di un angolo alla circonferenza ed è congruente a tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sull'arco AB.

Proprietà delle secanti di una circonferenza

Teorema. – Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono due secanti si ha che una di esse e la sua parte esterna alla circonferenza sono i medi e l'altra secante e la sua parte esterna sono gli estremi di una proporzione cioè

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD \text{ oppure } OA : OC = OD : OB$$



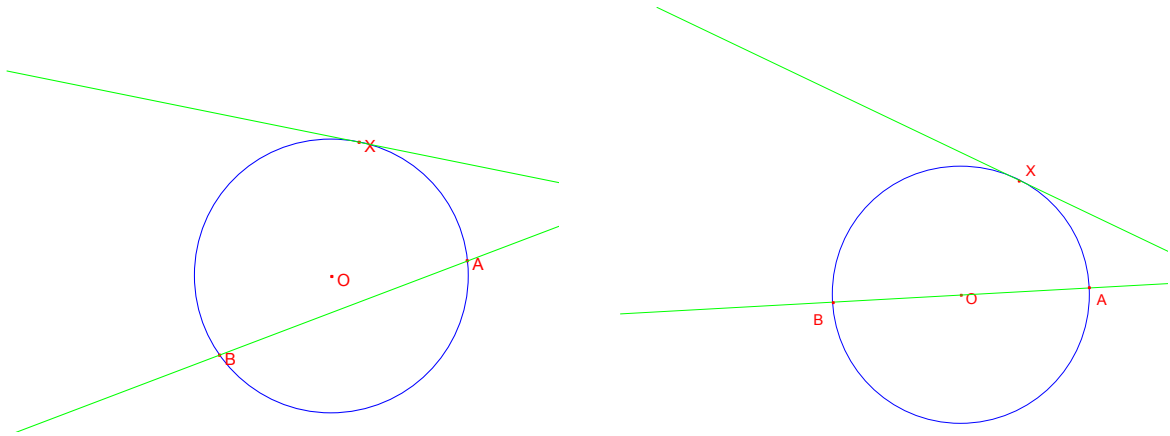
Teorema. – Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono una tangente e una secante si ha che la tangente è media proporzionale tra la secante e la sua parte esterna cioè:

$$OC : OA = OA : OD \text{ oppure } OA^2 = OC \cdot OD$$

POTENZA DI UN PUNTO RISPETTO AD UNA CIRCONFERENZA

Sia P un punto del piano euclideo e sia G una circonferenza di centro O e raggio r.

Se P è esterno alla circonferenza, il teorema della tangente e della secante afferma che $PX^2 = PA \cdot PB$ (vedi fig.)



Considerata la secante passante per O e indicata con d la distanza tra P e O si ottiene che

$$PX^2 = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2.$$

Definiamo questo numero potenza di p rispetto a G: **powG(P) = $d^2 - r^2$**

Osservazione: **se P appartiene a G allora powG(P) = 0**

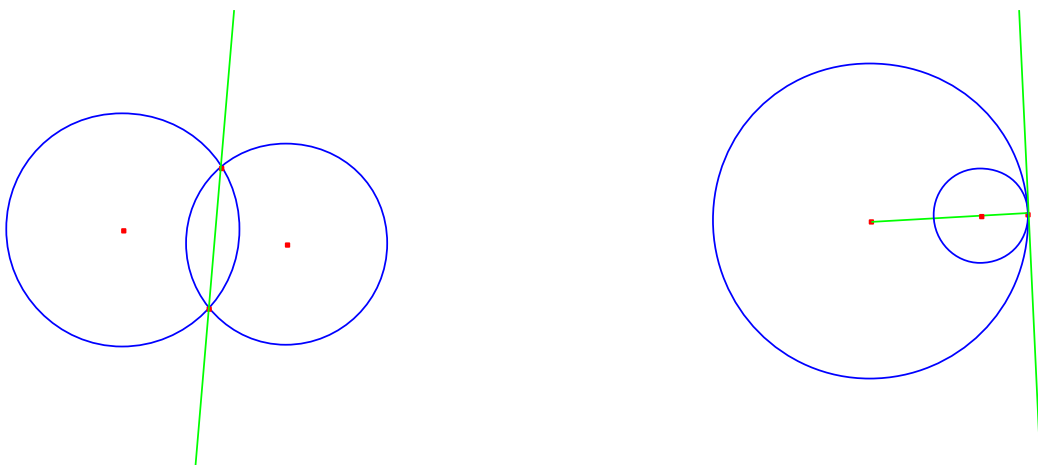
se P è interno a G allora powG(P) < 0

ASSE RADICALE

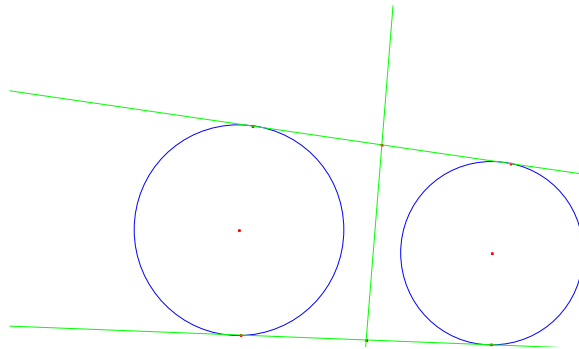
Date due circonferenze G1 e G2, definiamo asse radicale la retta luogo dei punti che hanno la stessa potenza rispetto alle due circonferenze.

Osservazione Se G1 e G2 si intersecano, i punti d'intersezione appartengono all'asse radicale in quanto hanno potenza zero rispetto alle due circonferenze. Quindi l'asse radicale coincide con la retta passante per i due punti d'intersezione tra le circonferenze.

Se le circonferenze sono tangenti, l'asse radicale coincide con la tangente alle due circonferenze nel loro punto d'intersezione.

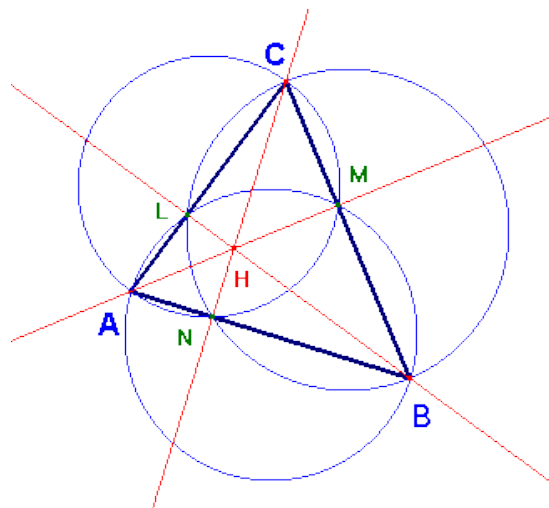


Se si considerano due tangenti comuni alle circonferenze, allora l'asse radicale passa per i punti medi dei segmenti di tangenza. Questo avviene perché i punti medi hanno sicuramente stessa potenza rispetto alle due circonferenze ($PX^2 = PX'^2$).



Osservazione L'ortocentro di un triangolo è il centro radicale delle tre circonferenze che hanno come diametro i lati.

Basta ricordare (si veda la figura qui sotto) che i triangoli BLA , BLC , AMB , AMC , CNA , CNB , sono rettangoli e quindi iscrivibili in una semicirconferenza.

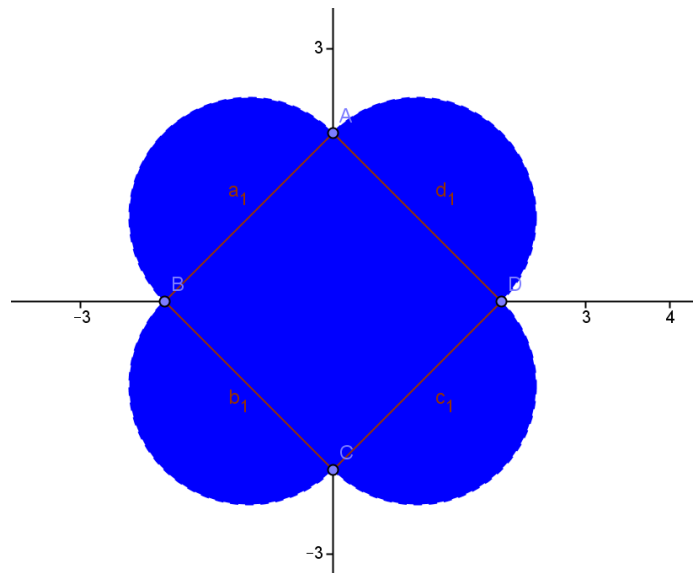


Esercizio 1

Calcolare l'area della parte di piano individuata dai punti che sono soluzione della disequazione $x^2 + y^2 - 2|x| - 2|y| = 0$. Restituire la somma delle cifre del numero trovato.

Soluzione: 23

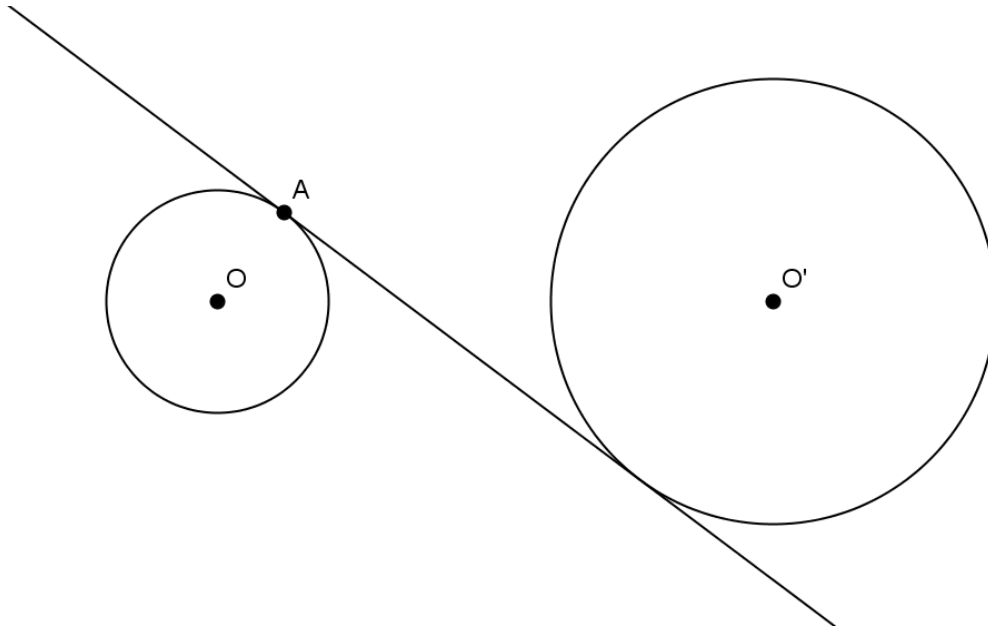
Svolgimento: la disequazione ha per soluzione l'insieme di figura, quindi la sua area si trova sommando l'area di un quadrato di lato $2\sqrt{2}$ all'area di due cerchi di diametro $2\sqrt{2}$ quindi $8 + 4\pi = 20,5664$ cioè sommando tutte le cifre 23.



Esercizio 2

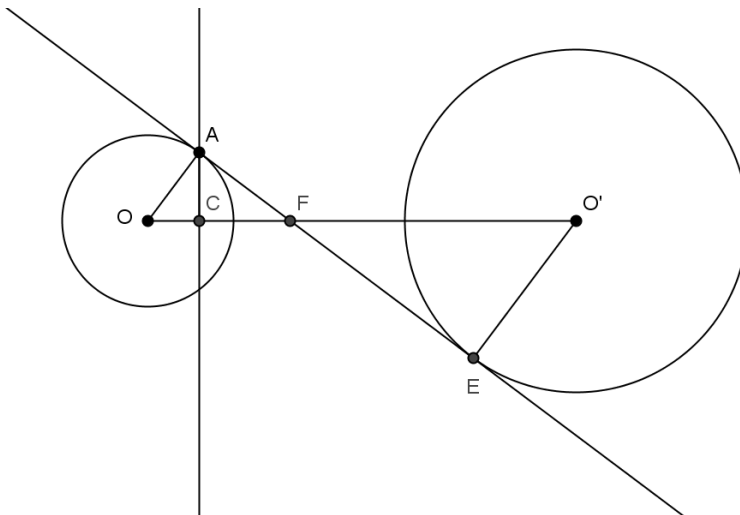
Nella figura che segue le circonferenze hanno raggio 1 e 2 e la distanza tra i due centri è 5. La retta è tangente alle due circonferenze ed il punto A è il punto di tangenza con la circonferenza di raggio minore. Qual è la distanza di A dalla retta dei centri (retta OO')? Restituire il numero moltiplicato per 100.

Soluzione: 80



Svolgimento: siano $OF = x$ e $O'F = y$. Poiché i raggi sono uno doppio dell'altro sarà $y = 2x$ e
 $x + y = 5$ cioè $3x = 5$ $x = OF = \frac{5}{3}$.

Dalla similitudine dei triangoli AOC e OAF si ottiene che $AC = \frac{4}{5} = 0,8$. Quindi la risposta è 80.

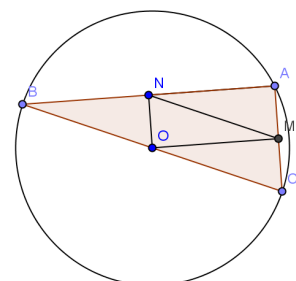


Esercizio 3

Del triangolo ABC conosciamo che $BC = 26$. Inoltre, chiamando O il circocentro e N, M i punti medi di AB, AC, si sa che $ON = 5$ e $OM = 12$. Quanto vale la somma di area e perimetro di ABC?

Soluzione: 180

Svolgimento: MN è parallelo e congruente alla metà di BC, quindi $MN = 13$. Il triangolo OMN è rettangolo ($5^2 + 12^2 = 13^2$) e quindi il



quadrilatero MONA ha tre angoli retti (quindi quattro) ed è quindi un rettangolo. Quindi i lati del triangolo misurano 10,24,26 (è un triangolo simile ad ABC), il perimetro misura 60 e l'area è

$$\frac{AB \cdot BC}{2} = 120. \text{ Quindi la somma tra area e perimetro è } 180.$$

Esercizio 4

In un parallelogramma ABCD il lato AB misura 32 e il lato AD misura 12. Sia P un punto interno al parallelogramma tale che $\angle APB + \angle DPC = 180^\circ$. Se BP misura 7 e DP misura 20, qual è il prodotto tra le misure di AP e PC?

Soluzione: 244

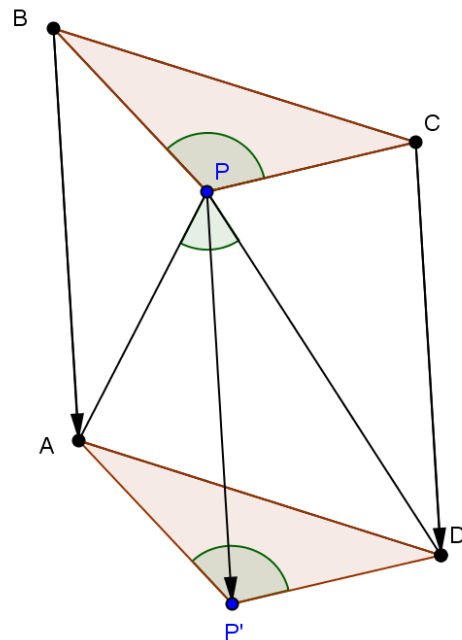
Svolgimento: il quesito è facilmente risolvibile applicando il teorema di Tolomeo. Per far questo

costruiamo un quadrilatero ciclico traslando di vettore $\overrightarrow{BA}$ il triangolo BPC . Quindi il quadrilatero $APDP'$ è ciclico (ha due angoli opposti supplementari) ed è applicabile il teorema di Tolomeo:

$$AP \cdot DP' + PD \cdot AP' = AD \cdot PP' \text{ cioè}$$

$$AP \cdot DP' = AD \cdot PP' - PD \cdot AP' = AD \cdot AB - PD \cdot BP = 12 \cdot 32 - 20 \cdot 7 = 244$$

(la figura non è in scala)



Esercizio 5

Siano ABCD e A'B'C'D' due facce opposte di un cubo e sia A'C una diagonale. Se $AB=6$, quanto misura AH, dove H è la proiezione del vertice A sulla diagonale? Restituire la parte decimale del numero trovato.

Soluzione: 4642

Svolgimento: Il triangolo AA'C ha lati di misura 6, $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$ ed è rettangolo in A. Quindi A'H, con il

primo teorema di Euclide, vale $A'H = \frac{6^2}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, cioè $A'H = 2\sqrt{3} = 2 \cdot 1,7321 = 3,4642$. Quindi

la soluzione è 4642.

TRASFORMAZIONI DEL PIANO

Definizione: Si chiama **trasformazione** del piano in sé ogni funzione biunivoca che associa a ogni punto $P(x, y) \in R^2$ un punto $P'(x', y') \in R^2$ le cui coordinate soddisfano a una relazione del tipo $T \equiv \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ dove $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono funzioni nelle variabili x e y di R^2 in R .

Se le $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono funzioni lineari, allora la trasformazione si definisce **lineare** e in questo caso la sua forma diventa $T \equiv \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$ (1), oppure in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

La biunivocità della (1) garantisce l'esistenza della trasformazione inversa; la condizione da verificare è: *determinante della matrice* $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Esempio:

a) Le seguenti equazioni $\begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = 2x - 3y - 1 \end{cases}$ determinano una trasformazione perché il determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$.

b) Le seguenti equazioni $\begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = 2x + 4y - 1 \end{cases}$ non determinano una trasformazione perché il determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

c) Le seguenti equazioni $\begin{cases} x' = (k-1)x + ky - 3 \\ y' = (2k-3)x - (k-2)y - 1 \end{cases}$ determinano una trasformazione solo se il determinante $\begin{vmatrix} k-1 & k \\ 2k-3 & -k+2 \end{vmatrix} \neq 0$ e cioè solo se $3k^2 - 6k + 2 \neq 0$.

Se il determinante della matrice dei coefficienti A è positivo, la trasformazione è diretta, cioè mantiene l'ordinamento dei punti del piano; se è negativo, inverte tale ordinamento. Ad esempio, una simmetria assiale è indiretta, una traslazione è diretta.

Definizione: si dice che una trasformazione:

- Conserva il parallelismo se trasforma rette parallele in rette parallele (fig. 1)
- Conserva la direzione se trasforma una retta in una retta parallela a quella data (fig. 2)

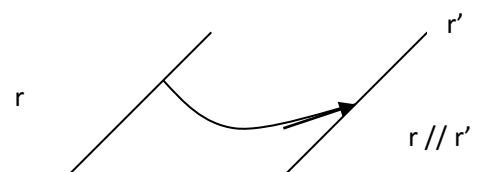
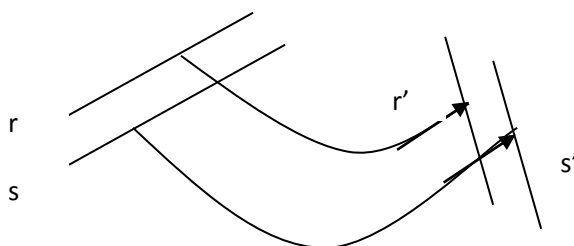


Figura 1

Figura 2

Teorema: Ogni trasformazione lineare piana conserva il parallelismo.

Definizione: Si chiama **punto unito** di una trasformazione T un punto P che si trasforma in se stesso, cioè $T(P)=P$.

E' chiaro dalla definizione che i punti uniti di una trasformazione si trovano risolvendo il

$$\text{sistema } T \equiv \begin{cases} x = ax + by + e \\ y = cx + dy + f \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema può essere un punto o una retta che sarà formata da punti uniti. (es: nella simmetria assiale, l'asse è composto da punti uniti).

Definizione: Si chiama **retta unita** per una trasformazione T una retta r che si trasforma in se stessa, cioè $T(r) = r$. In particolare:

- Si dice **puntualmente unita** se ogni punto di r è unito (fig. 3)
- Si dice **globalmente unita** in caso contrario (fig. 4)

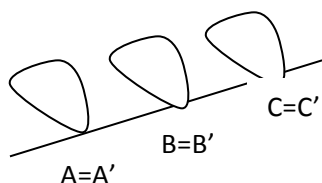


Figura 3

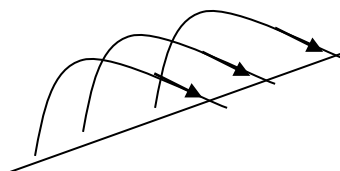


Figura 4

Da non dimenticare la retta $x = k$ che non rientra nel caso precedente.

Proprietà delle affinità

Le affinità trasformano:

- rette in rette
- rette incidenti in rette incidenti
- rette parallele in rette parallele
- angoli in angoli (in generale di ampiezza diversa)
- circonferenze in ellissi
- parabole in parabole
- iperboli in iperboli
- parallelogrammi in parallelogrammi
- figure geometriche di area S in figure geometriche di area $|ad - bc|S$
- il punto medio di un segmento nel punto medio del segmento trasformato

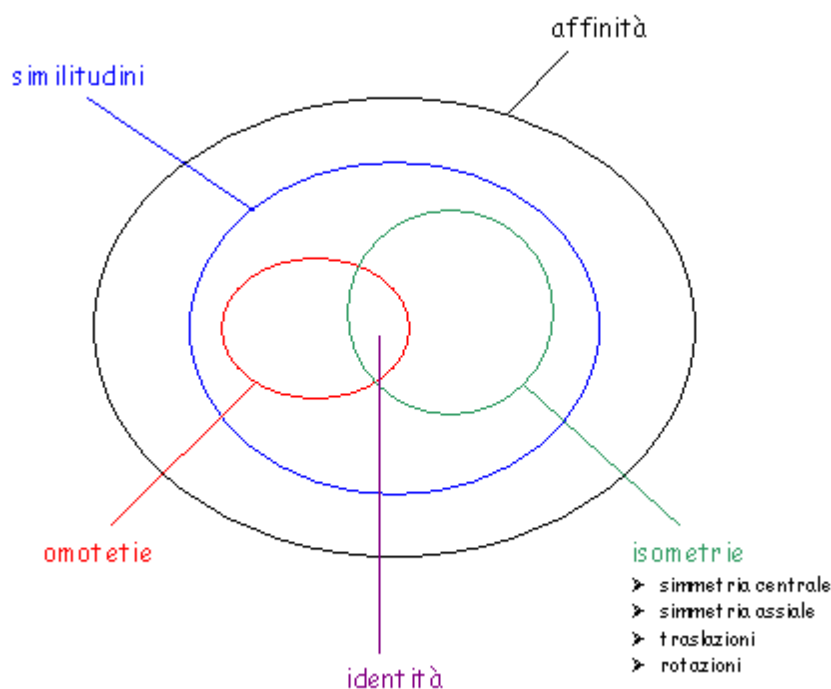
Le affinità conservano:

- il parallelismo
- il rapporto tra le aree corrispondenti
- l'allineamento dei punti
- i rapporti tra lunghezze di segmenti paralleli o appartenenti alla stessa retta

Le affinità non conservano:

- gli angoli
- il rapporto tra lunghezze di segmenti appartenenti a rette incidenti
- le aree e le lunghezze.

Le affinità comprendono tutte le trasformazioni piane più particolari, come le similitudini, le omotetie, le isometrie



ESEMPI

1. Scrivere l'equazione della trasformazione lineare che trasforma i punti $O(0,0)$, $A(0,1)$ e $B(-1,0)$ nei punti $O'(1,1)$, $A'(0,1)$ e $B'(-2,-1)$ e verificare che tutti i punti della retta $y=2x+1$ sono punti uniti.

Si noti che dalle ipotesi si può dedurre che A è un punto unito. L'equazione cercata è del tipo (1). Per trovare i coefficienti occorre sostituire le coordinate dei punti corrispondenti all'interno delle (1):

$$\begin{cases} 1 = e \\ 1 = f \\ 0 = b + e \\ 1 = d + f \\ -2 = -a + e \\ -1 = -c + f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 1 \\ f = 1 \\ b = -1 \\ d = 0 \\ a = 3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3x - y + 1 \\ y' = 2x + 1 \end{cases}$$

Per verificare che la retta data è unita, basta verificare che due suoi punti sono uniti oppure che il sistema $\begin{cases} x = 3x - y + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ è indeterminato.

2. Data la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = 2x - 3y + 1 \\ y = -x + 3y - 1 \end{cases}$, scrivere le equazioni della sua trasformazione inversa.

E' necessario risolvere il sistema esprimendo x e y in funzione di x' e y'; si ricava quindi

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3} \end{cases}$$

3. Data la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = 2x + y + 4 \\ y = -x + 2y - 1 \end{cases}$ scrivere:

- Le coordinate del punto P' trasformato di $P(5;-3)$
- L'equazione della trasformata della retta di equazione $3x-y+4=0$
- L'equazione della circonferenza trasformata di $x^2+y^2=4$

Per trovare le coordinate di P' dobbiamo sostituire le coordinate di P nelle equazioni ottenendo

$$\begin{cases} x' = 2(5) + (-3) + 4 \\ y = -(5) + 2(-3) - 1 \end{cases} \text{ cioè } P'(11;-12)$$

Per trovare le equazioni delle curve trasformate si devono trovare le equazioni della trasformazione inversa, che si ricavano come nell'esempio 1

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5}x' - \frac{1}{5}y' - \frac{9}{5} \\ y = \frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' - \frac{2}{5} \end{cases} . \text{ Le equazioni delle curve trasformate si ottengono sostituendo le equazioni}$$

trovate nelle equazioni delle curve: $3\left(\frac{2}{5}x' - \frac{1}{5}y' - \frac{9}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' - \frac{2}{5}\right) + 4 = 0$ cioè $x' - y' - 1 = 0$

$$\left(\frac{2}{5}x' - \frac{1}{5}y' - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' - \frac{2}{5}\right)^2 = 4 \quad \text{cioè } x^2 + y^2 - 8x + 2y - 3 = 0$$

4. Data l'affinità di equazioni $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$, determinare eventuali rette unite.

Per trovare le equazioni delle eventuali rette unite, consideriamo una generica retta r del piano di equazione $ax+by+c=0$ e troviamo l'equazione della sua trasformata r' .

Prima si determinano le equazioni della trasformazione inversa (es. 1) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \end{cases}$

In seguito si sostituiscono le equazioni trovate nell'equazione di r

$$a\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right) + c = 0 \quad \text{cioè } \left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)x' + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b\right)y' + c = 0$$

Le due rette sono coincidenti se i loro coefficienti sono proporzionali, cioè

$$\frac{\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)}{a} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b\right)}{b} = \frac{c}{c}$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b \right) = a \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b \right) = b \end{cases} \quad \text{che risulta essere indeterminato e ammette infinite soluzioni che si}$$

ottengono ponendo $a = \sqrt{3}b$. Pertanto si avranno infinite rette unite che hanno equazione $\sqrt{3}x + y + k = 0$

CLASSIFICAZIONE DI UN’AFFINITÀ

Per classificare un’affinità è necessario conoscere le proprietà delle similitudini, delle omotetie e delle isometrie che verranno presentate nelle pagine seguenti.

In questo paragrafo si vuole presentare la sequenza di operazioni da effettuare per classificare la trasformazione.

Dato il sistema (1) $\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$,

per verificare se si tratta delle equazioni di un’affinità si può seguire il seguente schema:

Calcolare $\det A$ con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- 1) **se $\det A = 0$** allora non possono essere le equazioni di un’affinità
- 2) **se $\det A < 0$** , allora si tratta di **un’affinità indiretta**, cioè che inverte l’ordine dei punti
- 3) **se $\det A > 0$** , allora si tratta di **un’affinità diretta**, cioè che mantiene l’ordine dei punti
- 4) si procede alla verifica delle seguenti condizioni:
 - I. **se $|\det A| = 1$** (condizione di equivalenza), allora le (1) sono le equazioni di **un’equivalenza**. Bisogna valutare se è anche un’isometria).
 - II. **se $|\det A| \neq 1$** , non è un’equivalenza, ma potrebbe essere una similitudine se...
 - III. **se è verificato il sistema (2)** $\begin{cases} a^2 + d^2 = b^2 + c^2 \\ ab + dc = 0 \end{cases}$ (condizione di similitudine), allora si tratta di **una similitudine**. Controllare se si tratta di un’omotetia...
 - IV. se sono verificate le condizioni di equivalenza e di similitudine (I e III), allora si tratta di **un’isometria**. (Cercare di individuare il tipo d’isometria seguendo gli schemi delle schede seguenti)

COMPOSIZIONE DI TRASFORMAZIONI

Date due trasformazioni $T_1: \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + e_1 \\ y' = c_1x + d_1y + f_1 \end{cases}$ e $T_2: \begin{cases} x' = a_2x + b_2y + e_2 \\ y' = c_2x + d_2y + f_2 \end{cases}$ si chiama

trasformazione prodotto o composizione di T_1 e T_2 la trasformazione geometrica che associa a ogni punto P il punto P' che si otterrebbe applicando prima T_1 e poi T_2 (analogo della composizione di funzioni).

Definizione: una trasformazione si dice **involutoria** se componendola con se stessa si ottiene l'identità.

LE ISOMETRIE DEL PIANO CARTESIANO

Definizione: si definisce **ISOMETRIA** ogni affinità tra i punti del piano che conservi le distanze.

Pertanto un'isometria trasforma:

- segmenti in segmenti di uguale lunghezza
- cerchi in cerchi dello stesso raggio
- rette perpendicolari in rette perpendicolari
- figure geometriche (triangoli, quadrati, poligoni, ...) in figure geometriche eguali

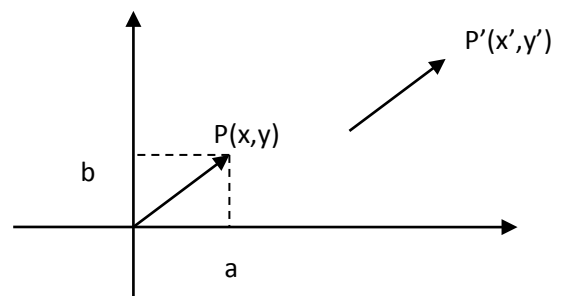
L'isometria più semplice è l'IDENTITÀ, che associa ogni punto del piano a se stesso.

Le isometrie più comuni sono: traslazione, rotazione, simmetrie rispetto a una retta o a un punto e le trasformazioni che si ottengono componendo due delle precedenti trasformazioni.

Equazioni di una traslazione nel piano cartesiano

Dato un vettore OA in un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, con A (a, b), una traslazione trasforma il punto P (x, y) nel punto P' (x', y') secondo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \det A = 1$$



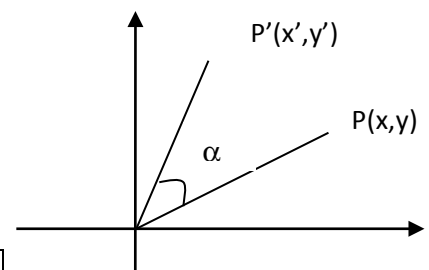
N.B. Le traslazioni non hanno punti uniti

Punti uniti	Nessuno se diversa dall'identità
Rette puntualmente unite	Nessuna
Rette globalmente unite	Ogni retta parallela al vettore che individua la traslazione
Conserva	▪ la distanza tra punti ▪ il parallelismo tra rette ▪ le direzioni ▪ l'ampiezza e l'orientamento degli angoli

Equazioni di una rotazione nel piano cartesiano attorno all'origine

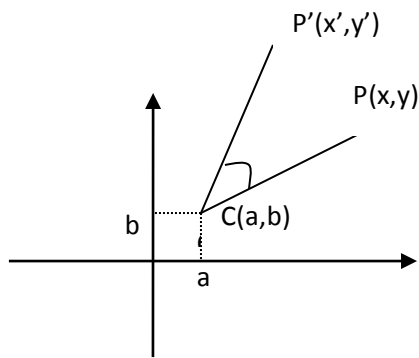
La rotazione di centro O(0,0) e angolo α che associa il punto P(x, y) al punto P'(x', y') come in figura ha le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ e } \det A = 1$$



Punti uniti	Solo il centro, se diversa dall'identità
Rette unite	Nessuna, se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pi$
Conserva	▪ la distanza tra punti ▪ il parallelismo tra rette ▪ l'ampiezza degli angoli

Equazioni di una rotazione nel piano cartesiano attorno ad un punto qualsiasi



La rotazione di centro $C(a, b)$ e angolo α che associa il punto $P(x, y)$ al punto $P'(x', y')$ come in figura ha le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = (x - a)\cos\alpha - (y - b)\sin\alpha + a \\ y' = (x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha + b \end{cases}$$

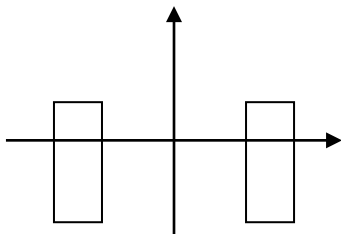
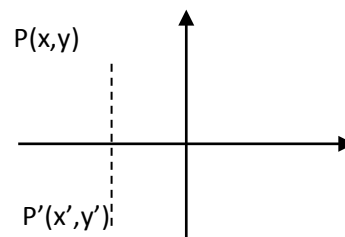
con $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ e $\det A = 1$

Punti uniti	Solo il centro, se diversa dall'identità
Rette unite	Nessuna, se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pi$
Conserva	- la distanza tra punti - il parallelismo tra rette - l'ampiezza degli angoli

SIMMETRIE ASSIALI

Equazioni di una simmetria rispetto all'asse x

$$\sigma_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

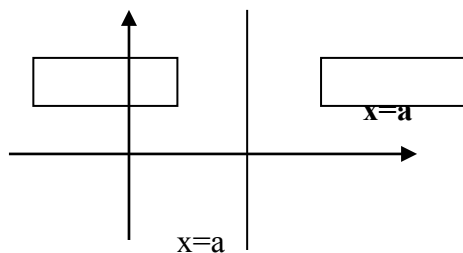
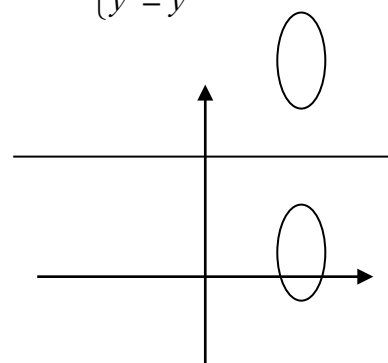


Equazioni di una simmetria rispetto all'asse y

$$\sigma_y : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Equazioni di una simmetria rispetto alla retta $y=b$

$$\sigma_{y=b} : \begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$



Equazioni di una simmetria rispetto alla retta

$$\sigma_{x=a} : \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$

Equazioni di una simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante

$$\sigma_{y=x} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Equazioni di una simmetria rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante

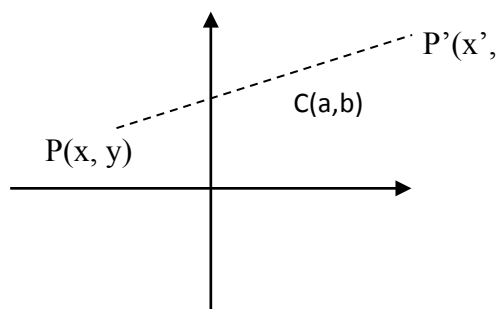
$$\sigma_{y=-x} : \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

Punti uniti	Tutti i punti dell'asse
Rette puntualmente unite	L'asse
Rette globalmente unite	Ogni retta perpendicolare all'asse
Conserva	▪ la distanza tra punti ▪ il parallelismo tra rette ▪ le direzioni ▪ l'ampiezza degli angoli
Scambia	L'orientamento degli angoli

Equazioni di una simmetria centrale

Definizione: una *simmetria centrale* di centro $C(a, b)$ è l'isometria che a ogni punto $P(x, y)$ associa il punto $P'(x', y')$ tale che il punto C sia il punto medio del segmento PP'

$$\sigma_C : \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$



In particolare, se il centro è l'origine, si ha:

$$\sigma_O : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

OMOTETIE DEL PIANO CARTESIANO

Definizione: un'*omotetia di centro $C(a, b)$ e rapporto h* è una trasformazione del piano che fa corrispondere a ogni punto $P(x, y)$ il punto $P'(x', y')$ tale che $OP = h \cdot OP'$.

Centro nell'origine

$$\begin{cases} x' = hx \\ y' = hy \end{cases} \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \text{ e } \det A = h^2 > 0$$

Centro in un punto qualsiasi

$$\begin{cases} x' = hx + a \\ y' = hy + b \end{cases} \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \text{ e } \det A = h^2 > 0$$

Punti uniti	Se $h \neq 1$, solo il centro Se $h = 1$ tutti i punti sono uniti
Rette globalmente unite	Ogni retta passante per il centro

Conserva	▪ il rapporto delle distanze tra due punti ▪ il rapporto tra le aree ▪ le direzioni delle rette ▪ l'ampiezza e l'orientamento degli angoli
Manda	▪ rette non passanti per O in rette parallele ▪ il segmento AB, lungo l, nel segmento di estremi O(A), O(B), lungo hl ▪ la circonferenza di centro C e raggio r nella circonferenza di centro O(C) e raggio hr ▪ figure geometriche di area S in figure geometriche di area hS

SIMILITUDINI DEL PIANO CARTESIANO

Definizione: una **similitudine** è un'affinità del piano che mantiene costante il rapporto tra segmenti.

Le equazioni delle similitudini sono di due tipi:

1. similitudine diretta

$$\begin{cases} x' = ax - cy + e \\ y' = cx + ay + f \end{cases} \quad \text{con } \det A = \begin{vmatrix} a & -c \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 + c^2 > 0$$

2. similitudine indiretta

$$\begin{cases} x' = ax + cy + e \\ y' = cx - ay + f \end{cases} \quad \text{con } \det A = \begin{vmatrix} a & c \\ c & -a \end{vmatrix} = -a^2 - c^2 < 0$$

In entrambe i casi il rapporto di similitudine è $h = |a^2 + c^2|$

Osservazione: Ogni isometria è anche una similitudine

Ogni omotetia è una similitudine

Conserva	▪ il rapporto delle distanze tra due punti ▪ il parallelismo tra rette ▪ l'ampiezza degli angoli
Trasforma	▪ rette in rette ▪ rette incidenti in rette incidenti ▪ rette parallele in rette parallele ▪ il punto medio di un segmento nel punto medio del segmento trasformato

INVERSIONI

Definizione: un'**inversione i** rispetto a una circonferenza Γ di centro O è una trasformazione che manda ogni punto $P \neq O$ del piano in un punto Q tale che:

- la retta OP coincide con la retta OQ, P e Q stanno dalla stessa parte rispetto ad O;
- $OQ = 1/OP$.

In questo modo è ben definita l'immagine di tutti i punti $P \neq O$.

In coordinate cartesiane: l'equazione di Γ è $x^2 + y^2 = 1$; **i** si può rappresentare nella forma:

$$(x, y) \rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} (x, y).$$

Un'inversione ha per punti fissi tutti e soli i punti di Γ .

Un'inversione è invertibile e la sua inversa è l'inversione stessa; applicando due volte un'inversione, si ottiene l'identità.

Un'inversione manda:

- Rette passanti per O in se stesse
- Una retta r che non passa per O in una circonferenza passante per O, la cui tangente in O è parallela a r
- Il segmento AB in un altro segmento o in un arco di circonferenza, a seconda che il punto O appartenga o meno alla retta AB
- Circonferenze passanti per O in rette non passanti per O
- Circonferenze non passanti per O in circonferenze non passanti per O (N.B.: il centro non va in generale nel centro!)
- Angoli formati da rette e circonferenze in angoli di uguale ampiezza (angolo retta-circonferenza = angolo tra retta e tangente in un punto d'incontro).

Un'inversione conserva gli angoli

Un'inversione non conserva tutto il resto, in particolare aree, lunghezze e i relativi rapporti.

TEOREMA DI PICK

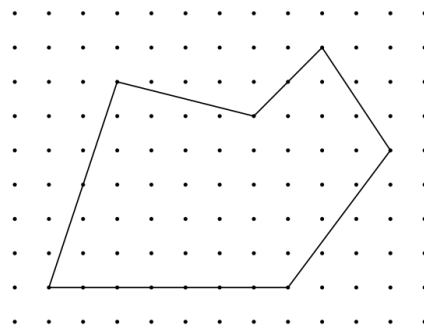
Il **teorema di Pick** permette di calcolare l'area di un poligono semplice i cui vertici hanno coordinate intere.

Teorema: In un poligono semplice i cui vertici hanno coordinate intere, siano:

- i = numero di punti a coordinate intere interni al poligono;
- p = numero di punti a coordinate intere sul perimetro del poligono (vertici compresi).

L'area A del poligono può essere calcolata tramite la formula: $A = i + \frac{p}{2} - 1$.

Esempio 1: Nella figura i punti interni sono 39 mentre i punti sul perimetro sono 14. Applicando il teorema di Pick si ha: $i = 39$, $p = 14$, da cui $A = 39 + 7 - 1 = 45$.

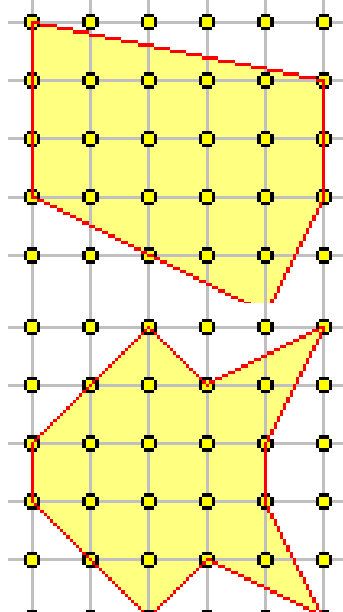


Il teorema vale sia per poligoni concavi che convessi; **esempio 2:**

Poligono convesso

$I = 14$ $A_1 = ?$ $P = 9$

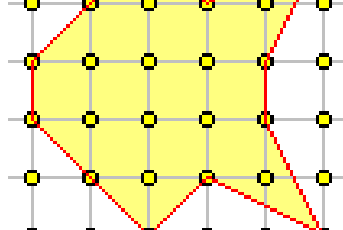
$$A = 14 + 4,5 - 1 = 17,5$$



Poligono concavo

$I = 10$ $A_2 = ?$ $P = 12$

$$A = 10 + 6 - 1 = 15.$$



ESERCIZI

1. Data la trasformazione $T: \begin{cases} x' = -2x + 1 \\ y' = x - 2y - 3 \end{cases}$, ricercarne punti uniti e rette unite. La risposta al problema è data da:
- somma dei valori assoluti delle coordinate dei punti uniti e somma del numeratore e del denominatore della frazione ottenuta al punto precedente
 - somma dei valori assoluti dei coefficienti delle equazioni delle rette unite scritte nella forma $ax + by + c = 0$ e ridotte ai minimi termini
 - somma dei numeri ottenuti nei punti a e b.

Risposta: 24

SOLUZIONE

L'inversa della trasformazione T è data da: $T^{-1}: \begin{cases} x = \frac{1-x'}{2} \\ y = -\frac{x'+2y'+5}{4} \end{cases}$; si tratta di un'affinità

diretta. Per ricercare i punti uniti si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2x + 1 \\ y = x - 2y - 3 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{1}{3}; -\frac{8}{9}\right). \text{ Sommando i moduli delle due coordinate si}$$

ottiene la frazione $\frac{11}{9}$, da cui sommando numeratore e denominatore si ottiene 20.

Per ricercare le rette unite, si procede così: data la retta $ax + by + c = 0$, la sua trasformata nella

$$\text{trasformazione } T \text{ è: } a \frac{1-x'}{2} - b \frac{x'+2y'+5}{4} + c = 0 \Rightarrow 2a - 2ax' - bx' - 2by' - 5b + 4c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-b-2a)x' - 2by' + 2a - 5b + 4c = 0; \text{ affinché la retta sia unita deve essere:}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b+2a}{2b} \\ \frac{c}{b} = \frac{2a-5b+4c}{-2b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ab = b^2 + 2ab \\ -2bc = 2ab - 5b^2 + 4bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ -6bc = 2ab - 5b^2 \end{cases}$$

Ora, dalla seconda equazione si ottiene: $c = -\frac{1}{3}a$.

Pertanto si ha una retta unita di equazione $ax - \frac{1}{3}a = 0$, da cui, dividendo tutto per $a \neq 0$, si

ottiene: $3x - 1 = 0$. La somma dei valori assoluti dei coefficienti dell'equazione trovata è 4; quindi il risultato del problema è: $20 + 4 = 24$.

2. Si consideri l'ottagono inscritto in un cerchio che ha quattro lati uguali lunghi 14 m e gli altri quattro lati uguali lunghi $7\sqrt{2}$ m. Quanto misura, in centimetri, il raggio della circonferenza circoscritta all'ottagono? Dare come risposta la parte intera del numero trovato.

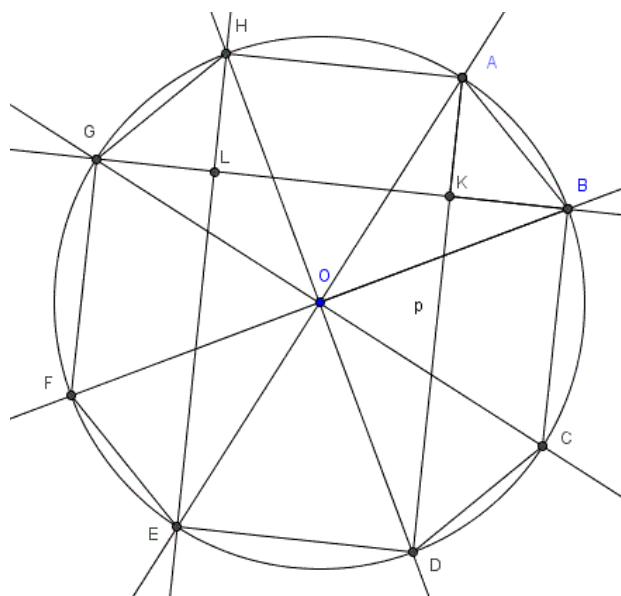
Risposta: 1565

SOLUZIONE

Un ottagono come descritto dal testo del problema deve essere formato tracciando quattro diametri a due a due perpendicolari tra loro, come in figura.

A questo punto la soluzione del problema è abbastanza banale:

considerando che il lato più piccolo misura $7\sqrt{2}$, il triangolo ABK deve essere rettangolo isoscele, per cui $BK = 7$ m; analogamente dicasi per GL, quindi $BG = 28$ m. A questo punto, deve essere:



$BF = \sqrt{BG^2 + FG^2} = \sqrt{14^2 + 28^2} = \sqrt{980} = 14\sqrt{5} \approx 31,305 \text{ m} \approx 3130,5 \text{ cm}$. Il raggio della circonferenza misura quindi 1565,25 cm, per cui la risposta è 1565.

3. Aldo, Bruno e Carlo abitano in case disposte sui vertici di un triangolo qualsiasi. Mentre Bruno si sta dirigendo da Carlo lungo il sentiero rettilineo che separa le abitazioni dei due ragazzi, proprio a metà strada, Aldo gli telefona dicendo di andare a casa sua per prendere un libro. Così Bruno cambia direzione e cammina verso la casa di Aldo, ma mentre si trova a metà strada, la mamma lo chiama dicendo di ritornare indietro perché si è dimenticato il portafoglio con i documenti e i soldi e quindi non potrebbe andare al cinema, usufruendo della riduzione per i possessori della carta studenti. A causa dell'agitazione per la paura di non riuscire ad arrivare in tempo per l'inizio del film, Bruno perde la merenda, senza accorgersi. Non gli resta che dirigersi verso il sentiero rettilineo che lo riporta a casa. Mentre cammina, la mamma lo richiama proprio quando è a metà strada, dicendogli che il papà di Aldo è appena passato a casa loro per prendere il suo portafogli, quindi non c'è più bisogno che ritorni a casa. Bruno si agita sempre più e perde il pacco di fazzoletti che gli servono per il forte raffreddore di cui è affetto in questi giorni. A questo punto ricambia nuovamente direzione e va verso la casa di Aldo percorrendo il sentiero rettilineo, per risparmiare tempo. Giunto a metà strada, avendo bisogno di un fazzoletto, si accorge di non averne più e di non avere neanche la merenda in mano. Fermandosi a riflettere, capisce che ha perso i due oggetti quando si è fermato per rispondere al telefono. Quindi decide di ritornare sui propri passi per riprendere le cose perdute. Per valutare quanto tempo impiegherà per l'operazione, Bruno calcola il rapporto tra l'area del triangolo formato dalle tre abitazioni e l'area del triangolo formato da lui stesso, dalla merenda e dai fazzoletti. Che numero trova?

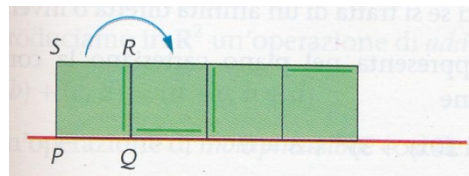
Risposta: 16

SOLUZIONE

Siano A (=Aldo), B (=Bruno) e C (=Carlo) i vertici del triangolo. Sia D il punto dove si trova Bruno quando lo chiama Aldo; siano E, F e G i tre punti dove si ferma successivamente. L'area del triangolo ABD è la metà dell'area del triangolo ABC (perché hanno la stessa altezza e metà

base). Analogamente l'area di ABE è la metà dell'area di ABD, l'area di AEF è la metà dell'area di ABE e infine l'area di EFG è la metà dell'area di AEF. Quindi il rapporto tra le aree è 16.

4. Un quadrato PQRS di lato 10 cm ruota senza scivolare lungo un segmento; inizialmente i vertici P e Q giacciono sul segmento: la prima rotazione avviene con centro in Q e porta R sul segmento, come in figura; le successive rotazioni avvengono come suggerito in figura. Le rotazioni hanno termine quando, per la prima volta, il vertice P ritorna in contatto con il segmento. Quanto vale, in centimetri, la lunghezza della curva descritta da P? Dare come risposta l'approssimazione del numero trovato alla cifra delle unità.

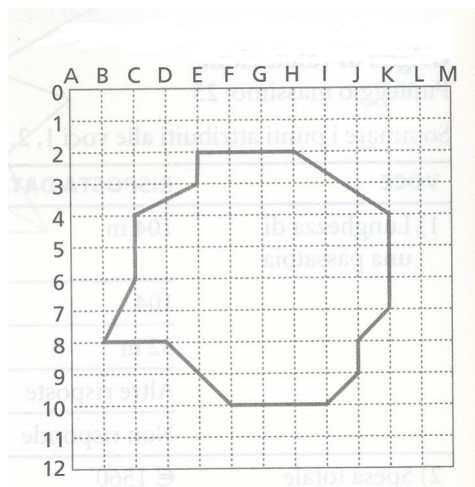


Risposta: $\pi(10 + 5\sqrt{2})$ cm ≈ 54 cm

SOLUZIONE

P descrive in successione 3 archi di circonferenza, su ciascuno dei quali insiste un angolo al centro di 90 gradi; il primo e il terzo hanno raggio pari al lato del quadrato (10 cm), il secondo ha raggio pari alla diagonale del quadrato ($10\sqrt{2}$ cm). In totale si ha $(1/4) \times 2\pi \times (2 \times 10 + 10\sqrt{2}) = \pi(10 + 5\sqrt{2})$.

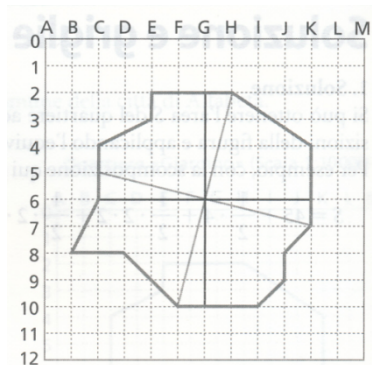
5. La Giunta comunale del comune di Matemago delibera la realizzazione di un nuovo quartiere denominato “Geomagia” che ha la forma in figura; in tale quartiere si devono realizzare due nuove strade denominate “Algebragia Nord-Sud” e “Aritmagia Est-Ovest” che rispettino i seguenti vincoli: entrambe le strade sono rettilinee, s’intersecano ad angolo retto, dividono il quartiere in quattro zone tra loro equivalenti, Algebragia dovrà congiungere un punto del lato di vertici E2 e H2 con un punto del lato di estremi F10 e I10, mentre Aritmagia dovrà unire un punto del lato di vertici C4 e C6 con un punto del lato di estremi K4 e K7. Assumendo come unità di misura il lato del quadretto del reticolo, calcolare l’area del quartiere, il quadrato della lunghezza di tutte le strade possibili di tipo “Algebragia” e “Aritmagia” e rispondere con la somma dei numeri trovati.



Risposta: 316

SOLUZIONE

Per ottenere l’area dell’intero quartiere si può applicare il teorema di Pick: il numero di vertici a coordinate intere interni alla figura è 42, il numero di vertici a coordinate intere sul perimetro è 22, quindi l’area vale $42 + 22/2 - 1 = 52$. Nella figura a fianco sono rappresentate le uniche due proposte di strade che verificano le richieste del comune, osservando che in entrambe i casi l’area delle quattro porzioni in cui viene suddiviso il quartiere è di 13 quadretti. La lunghezza della strada G2-G10 è pari a 8, quella della strada H2-F10 è pari a $2\sqrt{17}$, quindi la risposta è data da: $52 + 2 \times 8^2 + 2 \times (2\sqrt{17})^2 = 52 + 128 + 136 = 316$.



TRIGONOMETRIA

MISURA DEGLI ANGOLI

Oltre al sistema sessagesimale di misura degli angoli, si usa il “radiante”, che fa corrispondere all’angolo giro di 360° l’angolo 2π , all’angolo piatto di 180° l’angolo π , all’angolo retto di 90° l’angolo $\pi/2$. Per passare dalla misurazione degli angoli in gradi sessagesimali alla misurazione in radianti, si ricorre alla proporzione:

$$180^\circ : \pi = \alpha^\circ : \alpha_{\text{rad}}$$

da cui si ricava che: $\alpha_{\text{rad}} = \alpha^\circ \pi / 180^\circ$.

Si riportano nella tabella seguente gli angoli più importanti:

GRADI SESSAGESIMALI	RADIANTI
0°	0
15°	$\pi/12$
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
75°	$5\pi/12$
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3\pi/2$
360°	2π

LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Si consideri un sistema di assi cartesiani e una circonferenza con il centro coincidente con l’origine degli assi e il raggio unitario ($r=1$). Tale circonferenza viene detta ***circonferenza goniometrica*** (fig.1). Sulla circonferenza goniometrica si consideri un punto P, tale che il raggio OP formi con l’asse delle x l’angolo orientato α (α è positivo se forma una rotazione antioraria rispetto a x).

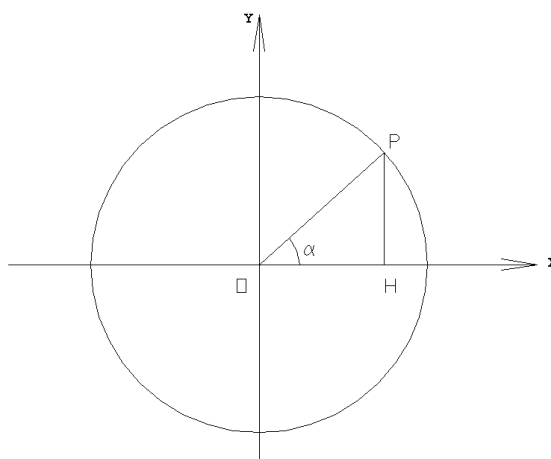


FIG.1

Il punto P ha coordinate: $P \equiv (OH; PH)$

Si definisce **seno** dell’angolo α l’ordinata del punto P:

$$\sin \alpha = PH.$$

Si definisce **coseno** dell'angolo α l'ascissa del punto P:

$$\cos \alpha = OH$$

Prolungando il raggio OP e chiamando P_2 l'intersezione di tale prolungamento con la retta tangente alla circonferenza del punto P_1 d'incontro tra la circonferenza e l'asse delle x (fig.2), si definisce **tangente** dell'angolo α l'ordinata del punto P_2 :

$$P_2P_1 = \tan \alpha$$

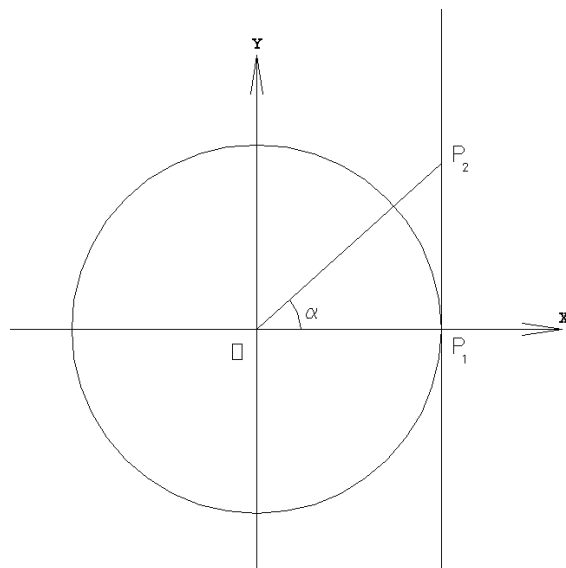


FIG.2

Si consideri ora la tangente alla circonferenza goniometrica portata per il punto A_1 d'intersezione tra la circonferenza e l'asse delle ordinate e s'indichi con A_2 l'intersezione tra tale tangente e il prolungamento del raggio OP (FIG.3).

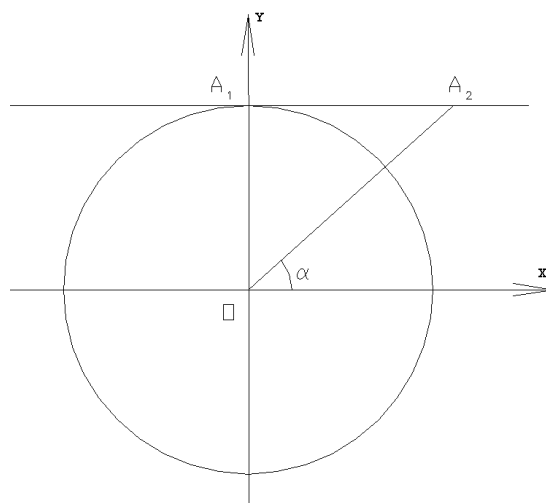


FIG.3

Si definisce **cotangente** dell'angolo α l'ascissa del punto A_2 :

$$A_1A_2 = \cot \alpha$$

VARIABILITÀ E GRAFICO DELLA FUNZIONE SENO

La funzione seno varia nel modo indicato nella tabella sottostante:

	α	Sen α
I QUADRANTE	$0 \leq \alpha \leq \pi/2$	Da 0 a 1
II QUADRANTE	$\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$	Da 1 a 0
III QUADRANTE	$\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2$	Da 0 a -1
IV QUADRANTE	$3\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi$	Da -1 a 0

La senoide è rappresentata in FIG.6.

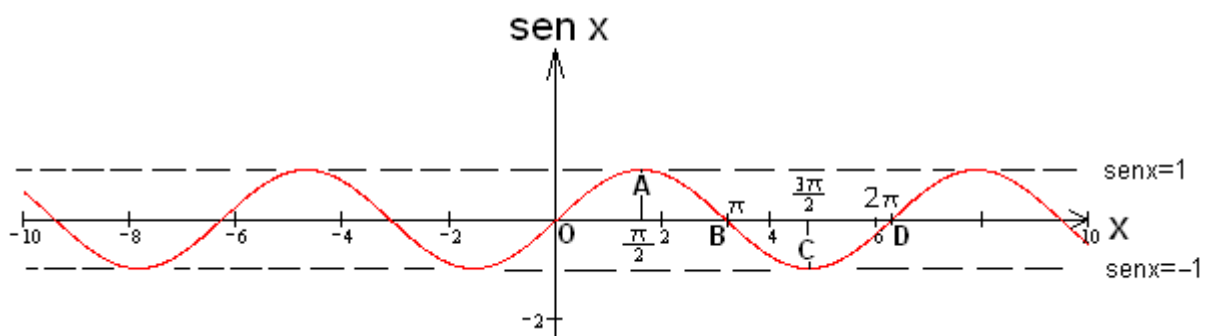


FIG.6

VARIABILITÀ E GRAFICO DELLA FUNZIONE COSENO

La seguente tabella contiene la variabilità della funzione coseno:

	α	cos α
I QUADRANTE	$0 \leq \alpha \leq \pi/2$	Da 1 a 0
II QUADRANTE	$\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$	Da 0 a -1
III QUADRANTE	$\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2$	Da -1 a 0
IV QUADRANTE	$3\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi$	Da 0 a 1

La cosinusoide è rappresentata in FIG.8.

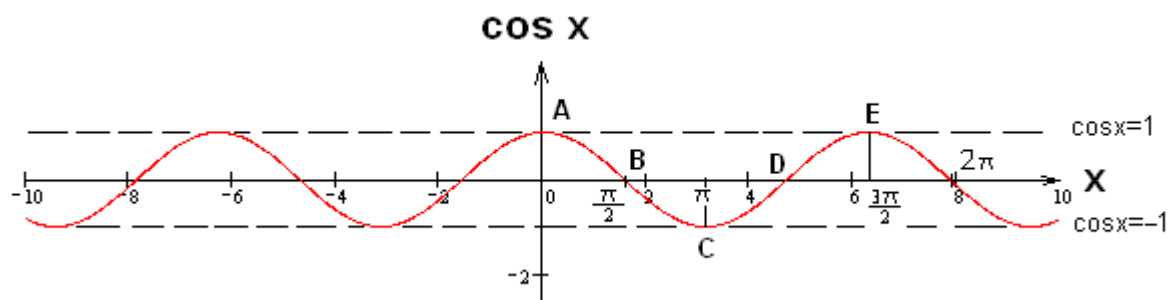


FIG.8

È interessante confrontare la senoide con la cosenoide.

Come si può osservare le due curve sono identiche e sfasate di $\pi/2$.

VARIABILITÀ E GRAFICO DELLA FUNZIONE TANGENTE

La seguente tabella contiene la variabilità della funzione TANGENTE:

	α	$\tan \alpha$
I QUADRANTE	$0 \leq \alpha \leq \pi/2^-$	Da 0 a $+\infty$
II QUADRANTE	$\pi/2^+ \leq \alpha \leq \pi$	Da $-\infty$ a 0
III QUADRANTE	$\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2^-$	Da 0 a $+\infty$
IV QUADRANTE	$3\pi/2^+ \leq \alpha \leq 2\pi$	Da $-\infty$ a 0

La tangentoide è rappresentata in FIG.11.

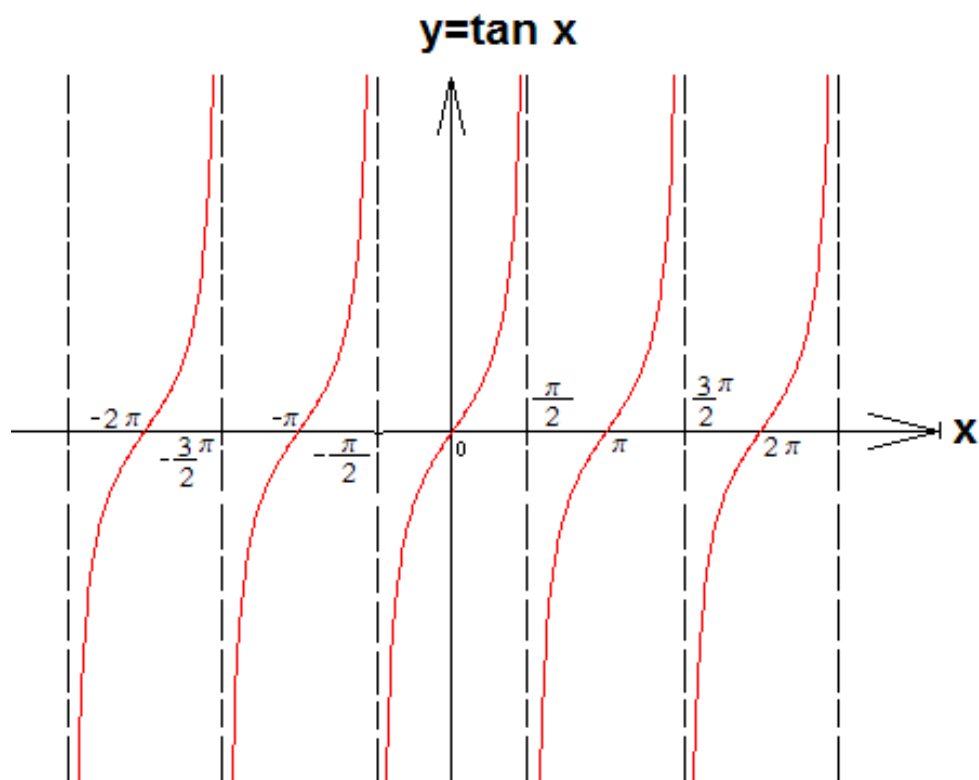


FIG. 11

IDENTITA' FONDAMENTALI DELLA TRIGONOMETRIA

Considerando la circonferenza goniometrica e un punto P su di essa, valgono le seguenti identità fondamentali:

1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ *prima identità fondamentale o pitagorica della trigonometria;*

2) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ *seconda identità fondamentale della trigonometria;*

3) $\cotan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ *terza identità fondamentale della trigonometria.*

FORMULE GONIOMETRICHE

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

FORMULE DI BISEZIONE

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

FORMULE PARAMETRICHE

$$\alpha \neq \pi + 2k\pi \quad \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

FORMULE DI WERNER

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

FORMULE DI BRIGGS

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b) \cdot (p-c)}{bc}}, & \sin \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-c)}{ac}}, & \sin \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-b)}{ab}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{p \cdot (p-a)}{bc}}, & \cos \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{p \cdot (p-b)}{ac}}, & \cos \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{p \cdot (p-c)}{ab}} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-a)}}, & \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-b)}}, & \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-b)}{p \cdot (p-c)}} \\ \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{p \cdot (p-a)}{(p-b) \cdot (p-c)}}, & \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{p \cdot (p-b)}{(p-a) \cdot (p-c)}}, & \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{p \cdot (p-c)}{(p-a) \cdot (p-b)}}\end{aligned}$$

FORMULE DI NEPERO

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

I valori delle funzioni goniometriche di angoli particolari sono riassunti nella seguente tabella:

	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$	360° 2π
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
Cotangente	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

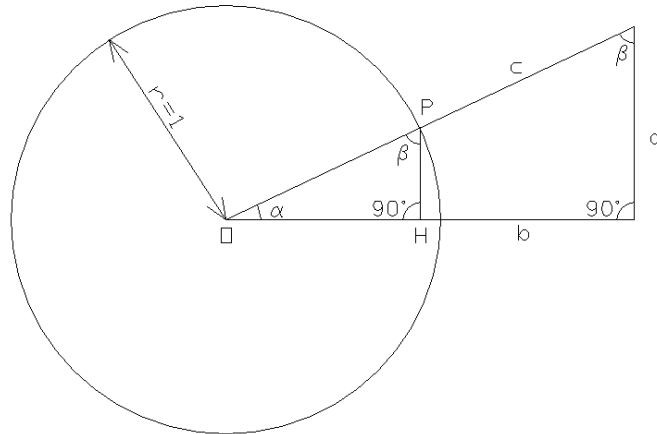


FIG. 28

PRIMO TEOREMA

In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto:

$$a = c \sin \alpha.$$

In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente:

$$b = c \cos \alpha$$

SECONDO TEOREMA

In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto cercato; oppure un cateto è uguale all'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente al cateto cercato.

$$a = b \tan \alpha$$

TEOREMA DELL'AREA

L'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo che essi formano.

$$Area = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

TEOREMA DEI SENI (o di Eulero)

in un triangolo qualsiasi è costante il rapporto tra ogni lato e il seno dell'angolo opposto.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

TEOREMA DI CARNOT (O DEL COSENO)

In un triangolo qualsiasi il quadrato di uno dei lati è pari alla somma dei quadrati degli altri due meno il doppio prodotto tra gli altri due lati per il coseno dell'angolo che essi formano.

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 AB AC \cos \alpha$$

TEOREMA DELLA CORDA

In una circonferenza la misura di una corda è pari alla misura del diametro per il seno di uno qualsiasi degli angoli alla circonferenza che insiste sull'arco sotteso alla corda.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

PROBLEMI DI TRIGONOMETRIA

Problema 1. (Primo allenamento Regione Abruzzo 11/2/2014, problema 16). Sia il triangolo ABC inscritto in un cerchio Ω di raggio 1, e si considerino le tre circonferenze tangenti internamente a Ω e ai lati del triangolo BC, CA, e AB nei loro rispettivi punti medi D, E e F. Se i raggi delle prime due di queste circonferenze sono rispettivamente $2/3$ e $2/11$ qual è l'inverso del raggio della terza circonferenza?

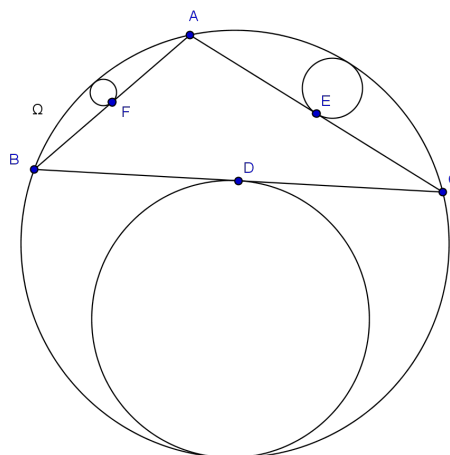
Soluzione. Data una corda AB qualsiasi di un cerchio di raggio 1, sia F il suo punto medio, questo spezza il diametro passante per esso in due parti di lunghezza x e $2-x$. Ora per il secondo teorema di Euclide, e posto γ un qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste sulla corda di estremi AB, si ha:

$$x(2-x) = \overline{AF}^2 = \left(\overline{AB}/2\right)^2 = \sin^2(\gamma)$$

risolvendo l'equazione di secondo grado in x

$x^2 - 2x + \sin^2(\gamma) = 0$ si ha:

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - \sin^2(\gamma)} = 1 \pm \cos(\gamma).$$



Facendo lo stesso conto per tutti i lati del triangolo ABC , dobbiamo stare attenti a quale segno prendere; si nota subito che se $r_1 = 2/3$, $r_2 = 2/11$ e r_3 il raggio incognito da trovare, allora $2r_1 = 4/3 > 1$ e quindi avremo che: $4/3 = 1 + \cos(\alpha)$, $4/11 = 1 - \cos(\beta)$ e

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{1 - \cos(\gamma)}{2} = \frac{1 - \cos(\pi - \alpha - \beta)}{2} = \frac{1 + \cos(\alpha + \beta)}{2} = \frac{1 + \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}{2} = \\ &= \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{11} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{6\sqrt{2}}{11}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{33 - 7 - 24}{33} = \frac{2}{2 \cdot 33} = \frac{1}{33} \end{aligned}$$

e quindi $1/r_3 = 33$. (Nelle uguaglianze qui sopra abbiamo tenuto conto del fatto che: $\cos(\alpha) = 1/3$, $\cos(\beta) = 7/11$ e, usando la formula fondamentale della goniometria, $\sin(\alpha) = 2\sqrt{2}/3$ e $\sin(\beta) = 6\sqrt{2}/11$). La risposta è quindi: **[0033]**.

Problema 2. (Gara di Matematica on-line 24/2/2014, problema 10). Sia il triangolo ABC con l'angolo in B di 80° e l'angolo in C di 70° , e sia $\overline{BC} = 1200\sqrt{3}$. Chiamando con H l'ortocentro del triangolo, si calcoli la misura del segmento $\overline{AH}$.

Soluzione. $\overline{AH}$ lo otteniamo come differenza di segmenti: $\overline{AH} = \overline{AL} - \overline{HL}$. Calcoliamoci alcune lunghezze (utilizzando il teorema dei seni e i vari risultati sui triangoli rettangoli):

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(70^\circ)} = \frac{\overline{BC}}{\sin(30^\circ)} \quad \text{da cui}$$

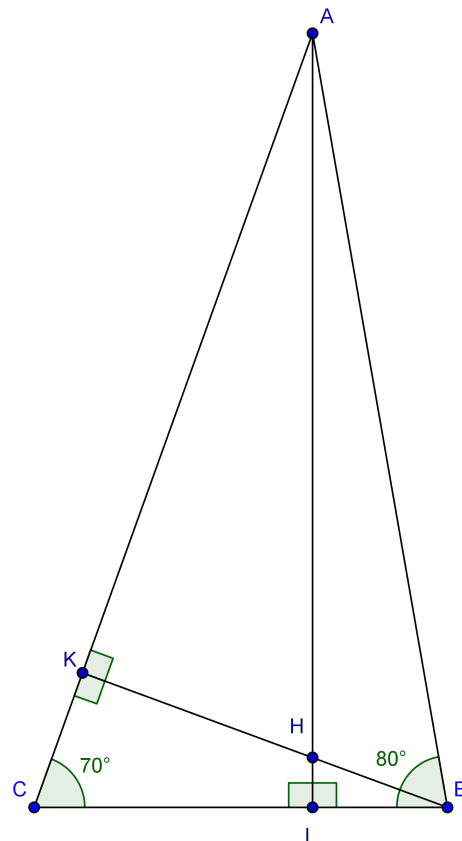
$$\overline{AB} = 2400\sqrt{3} \sin(70^\circ)$$

Ora si ha $\overline{AL} = \overline{AB} \sin(80^\circ)$ e

$\overline{BL} = \overline{AB} \cos(80^\circ)$ da cui

$$\overline{AL} = 2400\sqrt{3} \sin(70^\circ) \sin(80^\circ)$$

$$\overline{BL} = 2400\sqrt{3} \sin(70^\circ) \cos(80^\circ)$$



Inoltre $\overline{BK} = \overline{BC} \sin(70^\circ) = 1200\sqrt{3} \sin(70^\circ)$ e $\overline{CK} = \overline{BC} \cos(70^\circ) = 1200\sqrt{3} \cos(70^\circ)$.

Dalla similitudine dei due triangoli BLH e BKC si ha la seguente proporzione: $\overline{BL} : \overline{BK} = \overline{HL} : \overline{KC}$ da cui possiamo ricavarci HL :

$$\overline{HL} = \frac{2400\sqrt{3}\sin(70^\circ)\cos(80^\circ) \cdot 1200\sqrt{3}\cos(70^\circ)}{1200\sqrt{3}\sin(70^\circ)} = 2400\sqrt{3}\cos(80^\circ)\cos(70^\circ)$$

infine $\overline{AH} = \overline{AL} - \overline{HL} = 2400\sqrt{3}\sin(70^\circ)\sin(80^\circ) - 2400\sqrt{3}\cos(70^\circ)\cos(80^\circ)$ da cui, utilizzando le formule di addizione, $\overline{AH} = 2400\sqrt{3}[-\cos(70^\circ + 80^\circ)] = 2400\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 = 3600$, che è la risposta cercata: **[3600]**.

Osservazione. Questo problema ammette anche una più semplice soluzione in geometria sintetica, sfruttando triangoli simili e triangoli rettangoli con angoli acuti da 30° e 60° , però in questa sede ci premeva utilizzare le nozioni di goniometria e trigonometria apprese nella risoluzione di esercizi di tipo gara a squadre.

Problema 3. (IV Allenamento Regionale Tematico (Geometria) 28/2/2014, problema 12). Si consideri l'ottagono inscritto in un cerchio che ha quattro lati uguali lunghi 14 metri e gli altri quattro lunghi $7\sqrt{2}$ metri. Quanto misura, in centimetri, il raggio della circonferenza circoscritta all'ottagono? Dare come risposta la parte intera del numero trovato (nei conti si approssimi la $\sqrt{5}$ con 2,2361).

Soluzione. Dimentichiamo per il momento le unità di misura e consideriamo la circonferenza circoscritta all'ottagono. Siano $a = 14$ e $b = 7\sqrt{2}$ le lunghezze dei due tipi di lati diversi dell'ottagono e siano α e β due angoli alla circonferenza che insistono su un lato dell'ottagono (una corda) di lunghezza rispettivamente a e b . Utilizzando il teorema della corda, e chiamando con r il raggio della circonferenza (la nostra incognita), si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} 14 = 2r \sin(\alpha) \\ 7\sqrt{2} = 2r \sin(\beta) \\ 8\alpha + 8\beta = 2\pi \end{cases}$$

da cui $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $\sin(\alpha) = \frac{7}{r}$, $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = \frac{\sqrt{r^2 - 49}}{r}$ e (utilizzando le formule di sottrazione)

$\sin(\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(\alpha)$. Sostituendo ora queste espressioni nella seconda equazione del sistema otteniamo:

$$7\sqrt{2} = 2r \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - 49}}{r} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{r} \right)$$

cioè

$$7\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{r^2 - 49} - 7\sqrt{2},$$

$$\sqrt{r^2 - 49} = 14,$$

$$r^2 = 196 + 49 = 245 = 5 \cdot 49$$

quindi

$$r = 7\sqrt{5} = 7 \cdot 2,2361 = 15,6527$$

in metri e, in centimetri, $r = 1565,27$. La risposta è dunque **[1565]**.

Problema 4. (*Gara a Squadre di Secondo Livello, Roma 25/3/2010, problema 13*). Sia $ABCD$ un quadrato di centro O e lato 576. Sia M il punto medio del lato CD e prendiamo un punto P interno al quadrato tale che la sua distanza da A sia uguale ad AB , quella da O sia uguale a OM e tale che disti meno dal lato DC che non dal lato AB . Sia poi Q il simmetrico di P rispetto alla retta per O e per M e H la proiezione di P sulla retta OQ . Qual è la lunghezza del segmento PH ?

Soluzione. Sia ω l'angolo $\hat{POM}$ e sia $OM = OP := l$, allora applicando i teoremi sui triangoli rettangoli

$$PH = l \sin(2\omega) = 2l \sin(\omega) \cos(\omega)$$

Cerchiamo quindi di ricavarci un'espressione per $\sin(\omega)$ e $\cos(\omega)$. Consideriamo il triangolo OPR , si ha: $\overline{PR} = l \sin(\omega)$ e $\overline{OR} = l \cos(\omega)$. Applicando invece il teorema di Pitagora al triangolo APS si ha: $\overline{SP}^2 + \overline{AS}^2 = \overline{AP}^2$, cioè

$$l^2(1 - \sin(\omega))^2 + l^2(1 + \cos(\omega))^2 = 4l^2$$

dividendo per l^2 e semplificando l'espressione (ricordando anche la formula fondamentale della goniometria), otteniamo la formula finale $2\cos(\omega) = 2\sin(\omega) + 1$, sostituendo $\cos(\omega)$ con $\sqrt{1 - \sin^2(\omega)}$ (ω è acuto), elevando al quadrato e riordinando i membri:

$$8\sin^2(\omega) + 2\sin(\omega) - 3 = 0$$

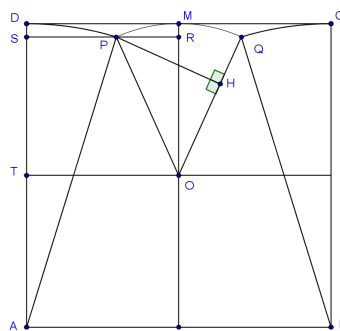
risolvendo si ottiene

$$\sin(\omega) = \frac{\sqrt{7} - 1}{4} \quad \text{e} \quad \cos(\omega) = \frac{\sqrt{7} + 1}{4}$$

quindi

$$PH = 2l \sin(\omega) \cos(\omega) = 576 \cdot \frac{\sqrt{7} - 1}{4} \cdot \frac{\sqrt{7} + 1}{4} = 576 \cdot \frac{6}{16} = 216. \text{ La risposta è quindi: } \mathbf{[0216]}.$$

Osservazione. Tale problema ben si presta anche a una soluzione che chiama in causa la geometria analitica: la figura può essere immersa in un piano cartesiano con centro O , si trovano quindi le

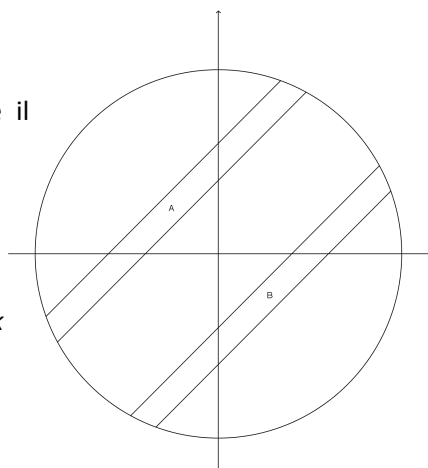


equazioni delle circonferenze in O di raggio l , in A e in B di raggio $2l$, queste ultime due s'intersecano singolarmente con la prima, ottenendo i punti P e Q , e poi si trova la retta OQ e la distanza di P da essa, cioè PH .

Problema 5. Trovare l'area della regione Γ del piano cartesiano formata da tutti e soli i punti $P(x, y)$ tali che: $x^2 + y^2 \leq \frac{10000}{\pi}$ e $\sin(y - x) \geq 0$.

Soluzione. Sia $\Gamma = \gamma_1 \cap \gamma_2$ dove $\gamma_1 : x^2 + y^2 \leq \frac{10000}{\pi}$ è il cerchio di centro $O(0,0)$ e raggio $r = \frac{100}{\sqrt{\pi}}$, mentre $\gamma_2 : \sin(y - x) \geq 0$ è un insieme formato da strisce nel modo seguente: risolvendo la disequazione $\sin(y - x) \geq 0$ si ha (k intero):

$$0 + 2k\pi \leq y - x \leq \pi + 2k\pi$$



cioè queste sono delle strisce infinite inclinate di 45° (intersezioni di due semipiani). La totalità di queste strisce (è una “zebratura” del piano) costituisce l'insieme γ_2 . Γ , intersezione tra γ_1 e γ_2 , sarà quindi una “zebratura” del cerchio. Fissato un numero intero k (opportunamente piccolo in valore assoluto, altrimenti siamo fuori dal cerchio), i punti $P(x, y)$ tali che $x + 2k\pi < y < x + (2k + 1)\pi$ e $\sin(y - x) \geq 0$ appartengono a Γ (sarebbero ad esempio i punti interni alla regione A della figura), mentre i loro simmetrici rispetto all'origine $Q(\xi, \eta)$, pur stando dentro il cerchio, non appartengono a Γ poiché soddisfano la condizione $\xi - (2k + 1)\pi < \eta < \xi - 2k\pi$ (sarebbero i punti interni alla regione B della figura). Da questo ragionamento si deduce che l'area della regione Γ è pari alla metà dell'area del cerchio (nella costruzione abbiamo trascurato i segmenti delimitanti le strisce, ma, costituendo appunto un insieme finito di segmenti, ha area 0), quindi:

$$Area(\Gamma) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{10000}{\pi} = 5000. \text{ La risposta è quindi: [5000].}$$