

CENNI SUL CONCETTO DI FUNZIONE

Dati due insiemi A e B , una funzione f è una relazione tra gli elementi dell'insieme A e gli elementi dell'insieme B tale che ad ogni elemento di A corrisponde uno ed un solo elemento di B .

Si potrebbe scrivere $f : a \rightarrow b$ (con $a \in A$ e $b \in B$) dove b prende il nome di **immagine** di a mediante la funzione f oppure si potrebbe scrivere $f : A \rightarrow B$ (dove in questo caso sono evidenziati i due insiemi e non gli elementi a e b). Gli insiemi A e B si dicono rispettivamente insieme di partenza e insieme di arrivo.

Quindi una funzione è un insieme di coppie di elementi, il primo scelto in A e il secondo scelto in B .

Es. Se $A = \{a; b; c\}$ e $B = \{1; 2; 3\}$, una funzione da A a B potrebbe essere definita dall'insieme di coppie: $(a; 1)$ $(b; 1)$ $(c; 2)$ ma non dall'insieme di coppie $(a; 1)$ $(b; 1)$ $(a; 2)$ $(c; 2)$ perché in questo caso all'elemento a corrispondono due elementi in B .

Più in generale, l'insieme A è chiamato **dominio** della funzione, il sottoinsieme di B che contiene tutte le immagini degli elementi di A è chiamato **codominio** della funzione.

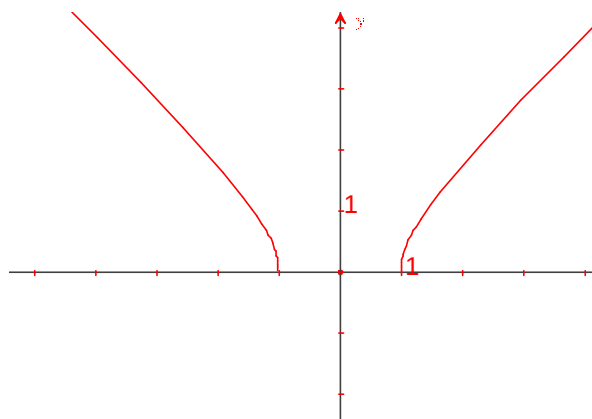
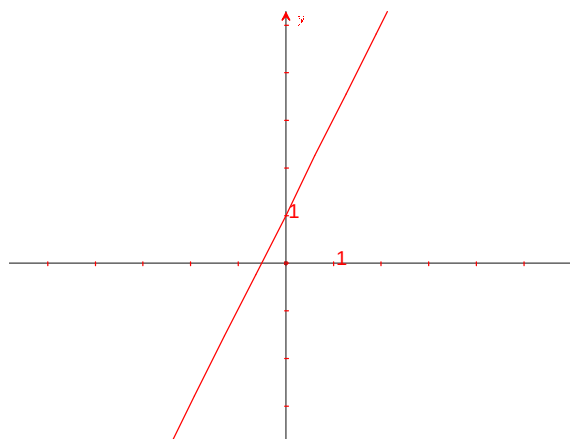
Se A e B sono sottoinsiemi (propri o impropri) di $\mathbb{R}$ (insieme di numeri reali) allora la funzione si dice *funzione reale di variabile reale*. In questo caso gli elementi dell'insieme A sono genericamente indicati con x e l'elemento che corrisponde a x in B si indica con $f(x)$ oppure con y . Si dice che x è la variabile indipendente, y la variabile dipendente; si scrive: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}$.

Spesso, come negli esempi che seguono, una funzione è assegnata mediante un'espressione analitica, ossia mediante una formula matematica.

In un piano cartesiano xOy l'insieme dei punti P di coordinate $(x; f(x))$ si chiama **grafico** della funzione.

Esempio 1

Disegniamo i grafici delle due funzioni f e g seguenti: $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$



f ha per dominio $\mathbb{R}$ e per codominio $\mathbb{R}$

g ha per dominio l'insieme $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ e per codominio $\mathbb{R}^+$ (numeri reali maggiori o uguali a zero.)

Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **iniettiva** se a due elementi distinti del dominio corrispondono due elementi distinti nel codominio, cioè $\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Analogamente si può dire che una funzione è iniettiva se $\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Continua l'esempio 1

La funzione f sopra disegnata è iniettiva mentre la funzione g non lo è (notiamo dal grafico che esistono infinite coppie di elementi nel dominio che hanno la stessa immagine, come ad esempio 1 e -1 per i quali si ha $g(1)=g(-1)=0$).

Una funzione si dice **suriettiva** o **surgettiva** se il codominio coincide con il secondo insieme (cioè con B). Questo vuol dire che $f(A) = B$, cioè che l'immagine dell'insieme di partenza coincide con tutto l'insieme di arrivo.

Una funzione si dice **biiettiva** o **bigettiva** se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva. In questo caso si ha che ad ogni elemento di A corrisponde un solo elemento di B (perché è una funzione) ma anche che ogni elemento di B è immagine di un solo elemento di A .

Se una funzione è biiettiva si può definire la **funzione inversa** $f^{-1}: B \rightarrow A$.

Se tracciamo in uno stesso piano cartesiano il grafico di una funzione f e della sua inversa otteniamo che i due grafici si corrispondono in una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Continua l'esempio 1

La funzione f dell'esempio è bigettiva e quindi è possibile definire la funzione inversa.

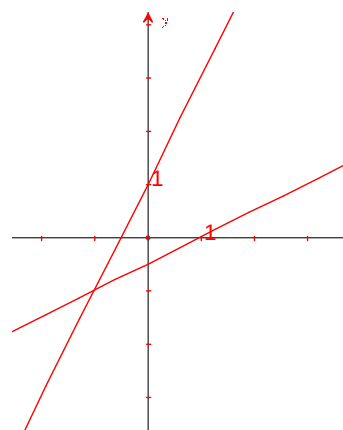
Come si trova la funzione inversa? Osserviamo che se in f esiste la coppia $(0;1)$ in f^{-1} ci sarà la coppia $(1;0)$, se in f esiste la coppia $(2;3)$ in f^{-1} ci sarà la coppia $(3;2)$.

Per trovare l'espressione analitica di f^{-1} è necessario esplicitare la variabile x , cioè

se sostituiamo y a $f(x)$, l'espressione di f diventa $y=2x+1$ ed esplicitando x si avrà $x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$.

A questo punto scambiando di x e y e chiamando y con $f^{-1}(x)$ si ottiene l'equazione $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Grafici di f e di f^{-1}



Date due funzioni f e g , si dice **funzione composta** di f e g , e si indica con il simbolo $g \circ f$ (che si legge: “ g composto f ”) la funzione definita da: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

graficamente: $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(x) \rightarrow \boxed{g} \rightarrow g(f(x))$
 $\searrow \quad \quad \quad \nearrow$
 $\boxed{g \circ f}$

affinché sia possibile calcolare $g(f(x))$, $f(x)$ deve appartenere al dominio di g .

Si osservi che la composizione si scrive nell'ordine inverso a quello di applicazione, cioè si scrive prima g poi f se si applica prima f poi g .

Allo stesso modo è possibile definire la funzione composta $f(g(x))$ (prima si applica la g poi la f) ma in generale l'operazione non è commutativa.

Continua l'esempio 1

Infatti, scrivendo le due funzioni composte relative agli esempi sopra considerati si ha:

$$g(f(x)) = g(2x+1) = \sqrt{(2x+1)^2 - 1}$$

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = 2\sqrt{x^2 - 1} + 1.$$

Proprietà:

- la composizione di funzioni iniettive è una funzione iniettiva
- la composizione di funzioni suriettive è una funzione suriettiva
- se $f(g(x))$ è una funzione suriettiva allora f è una funzione suriettiva
- se $f(g(x))$ è una funzione iniettiva allora g è una funzione iniettiva

Una funzione si dice **pari** se $f(-x) = f(x)$ mentre una funzione si **dice** dispari se $f(-x) = -f(x)$.

Il grafico di una funzione pari ha l'asse delle y come asse di simmetria (infatti, i punti del grafico di ascissa x e $-x$ hanno la stessa ordinata perché $f(-x) = f(x)$), mentre il grafico di una funzione dispari ha l'origine O degli assi come centro di simmetria (infatti, i punti del grafico di ascissa x e $-x$ hanno le ordinate opposte perché $f(-x) = -f(x)$)

Continua l'esempio 1

La funzione g dell'esempio è pari perché $g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = g(x)$.

Una funzione si dice **periodica** se esiste $T > 0$ tale che $f(x) = f(x + T)$ per ogni x .

Una funzione si dice:

- **strettamente crescente** se $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- **crescente in senso lato o debolmente crescente** se $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- **strettamente decrescente** se $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- **decrescente in senso lato o debolmente decrescente** se $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Una funzione strettamente crescente o strettamente decrescente si dice strettamente monotona.

Una funzione strettamente monotona è invertibile.

Una funzione biettiva o biunivoca è invertibile.

CENNI SULLE EQUAZIONI FUNZIONALI

Questo argomento generalmente viene trattato nelle gare individuali ma pensiamo sia comunque utile per apprendere delle tecniche di soluzione di quesiti che contengono funzioni.

Un'**equazione funzionale** è un'equazione che ha per incognita una funzione: si fornisce un'uguaglianza in cui compare una funzione incognita f e si chiede di determinare tutte le funzioni f che la verificano.

Esempio 2

determinare tutte le funzioni f tali che $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Non esistono grandi teoremi o risultati cardine sulle equazioni funzionali, l'unica cosa da fare è provare a fare manipolazioni algebriche e sostituzioni a partire dal testo dell'esercizio per arrivare a esplicitare la $f(x)$.

Suggerimenti

Potrebbe essere utile :

1. controllare se funzioni particolarmente semplici, come le costanti o le funzioni lineari, verificano l'equazione;

2. sostituire alle variabili x oppure y qualche numero (generalmente partendo da 0,1...);
3. scrivere una stessa cosa in più modi; per esempio se l'esercizio ci fornisce $f(a+b)$ in funzione di $f(a)$ e $f(b)$ si potrebbe tentare di scrivere $f(2)$ come $f(1+1)$ oppure $f(4)$ come $f(1+3)$ oppure $f(2+2)$;
4. fare dei cambi di variabile, cioè, ad esempio, sostituire $x+1$ con z e riscrivere l'equazione in funzione di z .

Vediamo qualche esempio in cui si sfruttano le tecniche sopra elencate.

Esempio 3

Risolvere l'equazione funzionale $f(x+y) = f(x) + f(y)$ con $f: Q \rightarrow Q$.

Soluzione: Cerchiamo innanzitutto le soluzioni costanti: se $f(x) = k$, deve essere $k = k + k$ e quindi $k = 0$. La funzione costante $f(x)=0$ è soluzione.

Se invece proviamo a sostituire la generica funzione lineare $f(t) = at + b$, con a e b costanti da determinare, otteniamo: $a(x+y) + b = ax + b + ay + b$

che è identicamente verificata se e solo se $b = 0$ per qualunque valore di a .

Quindi tutte le funzioni del tipo $f(t) = at$ sono soluzioni dell'equazione.

Osservazione: queste soluzioni sono uniche se x, y appartengono a Q (numeri razionali), mentre nell'insieme di numeri reali non si può dire nulla (la dimostrazione è **complessa**). Questo tipo di equazione funzionale si chiama **equazione di Cauchy**.

Esempio 4

Risolvere l'equazione funzionale $f(xy) = (f(x)-1)f(y) - x^2 + 1$.

Soluzione: si può cominciare cercando di sostituire qualche numero o alla x o alla y .

Proviamo ad esempio sostituendo $x = 0$ (così si annullano varie cose).

Si ottiene

$$f(0) = (f(0)-1)f(y) + 1$$

che si può scrivere come

$$(f(0)-1) - (f(0)-1)f(y) = 0$$

quindi raccogliendo, si ottiene:

$$(f(0)-1)(1-f(y)) = 0$$

Dalla relazione sopra scritta si ottengono le due condizioni:

$$(f(0)-1) = 0 \quad \text{oppure} \quad (1-f(y)) = 0$$

La seconda condizione equivale a $f(y) = 1 \quad \forall y \in R$, quindi la funzione cercata sarebbe una funzione costante e uguale a 1. E' possibile? **E' sempre necessario fare la verifica**, cioè sostituire nell'equazione iniziale e vedere se si ottiene un'identità.

Verifico:

$$1 = (1-1) \cdot 1 - x^2 + 1$$

e semplificando si ottiene:

$$x^2 = 0$$

Non abbiamo ottenuto un'identità (questa equazione è verificata solo per $x=0$) quindi la soluzione $f(x) = 1$ non è accettabile.

Considero la seconda condizione, cioè $f(0) = 1$, e provo a fare una sostituzione opportuna (di nuovo cerco una sostituzione che annulli qualcosa nell'equazione).

Provo a sostituire $y = 0$ e ottengo

$$f(0) = (f(x)-1)f(0) - x^2 + 1$$

e sostituendo $f(0) = 1$ si ottiene

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Potrebbe essere la soluzione?

Verifico sostituendo nell'equazione iniziale: si ottiene

$$\begin{aligned}x^2 y^2 + 1 &= (x^2 + 1 - 1)(y^2 + 1) - x^2 + 1 \\x^2 y^2 + 1 &= x^2 y^2 + 1\end{aligned}$$

che è un'identità e quindi la funzione $f(x) = x^2 + 1$ è la soluzione cercata.

Esempio 5

Si determini l'equazione della funzione $f : R \rightarrow R$ **suriettiva** tale che

$$f(x - f(y)) = 2f(x) + x + f(y)$$

Soluzione: vediamo come la condizione di suriettività permetta di trovare subito la soluzione. Infatti, in questo caso non conviene sostituire un numero alla x o alla y , ma sostituire direttamente a $f(y)$ (considerato che $f(y)$ può assumere un qualunque numero reale).

Ponendo $f(y) = 0$ si ottiene immediatamente $f(x) = 2f(x) + x$ e quindi $f(x) = -x$.

Verifichiamo che la funzione trovata risolve l'equazione:

$$\begin{aligned}f(x - f(y)) &= f(x + y) = -x - y = 2(-x) + x - y = -x - y. \\ \text{Dunque } -x - y &= -x - y.\end{aligned}$$

Osservazioni: come abbiamo visto la risoluzione di equazioni funzionali è generalmente un esercizio complesso, ma l'importante è non farsi impaurire dal problema e cominciare a fare qualcosa di "semplice" (come sostituire o verificare con funzioni note.....)

Esercizi proposti

Esercizio 1

Data una funzione tale che $f(x+1) = \frac{2f(x)+1}{2}$ e tale che $f(2) = 2$, quanto vale $f(1)$?

Esercizio 2

Sapendo che f è una funzione dispari, cioè tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x , quale delle seguenti è sicuramente una funzione dispari?

A) $f(x)-1$ B) $(f(x))^2$ C) $(f(x))^2 + f(x)$ D) $(f(x))^3 + 1$ E) $(f(x))^3 + f(x)$

Esercizio 3

Trova tutti i polinomi che verificano l'equazione $p(x+1) = p(x) + 2x + 1$.

Esercizio 4

Trova le funzioni $f : R \rightarrow R$ che verificano l'equazione funzionale:

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2$$

Suggerimento: sostituire prima $y = 0$ e poi $y = f(x) - x^2$

Esercizio 5

Risolvere l'equazione funzionale $\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ (con $f : R_0 \rightarrow R$.)

Suggerimento: sostituire x con $-\frac{1}{x}$ e sommare.....

Esercizio 6

Sia f una funzione reale di variabile reale che verifica le condizioni:

$$f(10+x) = f(10-x)$$

$$f(20+x) = -f(20-x)$$

per ogni valore di x . Si dimostri che f è dispari e periodica.