

Probabilità

Struttura ad albero e teorema di Bayes

Esempio A

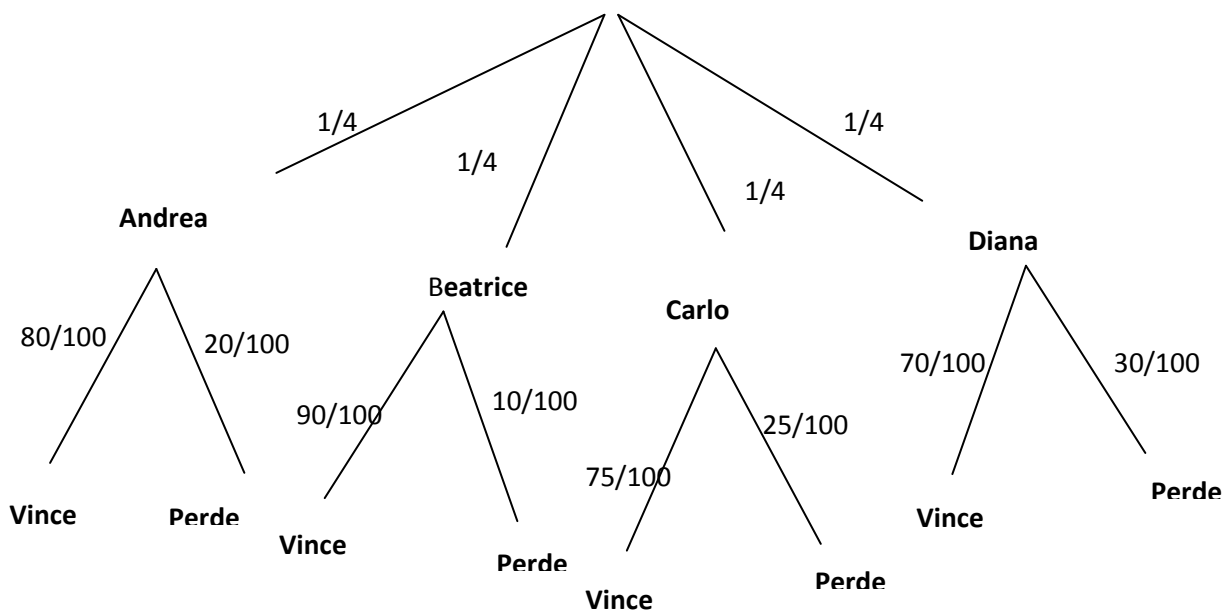
La tua scuola deve inviare ad una finale di Matematica un alunno scelto tra quelli che si sono meglio classificati nelle ultime gare delle Olimpiadi. Si decide di scegliere tra Andrea, Beatrice, Carlo e Diana. Si valuta che la probabilità di vittoria di Andrea sia del 80%, quella di Beatrice sia del 90%, quella di Carlo sia il 75% e quella di Diana il 70%.

Si tira un dado a 4 facce per scegliere tra i quattro alunni.

Qual è la probabilità di vittoria della tua scuola?

Qual è la probabilità che sia stato estratto Carlo, sapendo che la tua scuola ha vinto?

Per rappresentare la situazione è conveniente utilizzare un diagramma ad albero in cui nei nodi indichiamo i diversi esiti e nei rami le relative probabilità.



Notiamo che nel diagramma sopra disegnato abbiamo nei primi quattro nodi gli esiti del lancio di un dado a 4 facce (dal quale decidiamo se a gareggiare è Andrea, Beatrice, Carlo o Diana) e negli altri 8 nodi abbiamo gli altri esiti (Vince o Perde). Le probabilità su questa seconda serie di rami è una probabilità condizionata (si potrebbe scrivere $P(V/A)=80/100$ e $P(P/A)=20/100$ indicando nel primo caso la probabilità che la scuola Vinca condizionata dal fatto che gareggi Andrea e nel secondo caso la probabilità che la scuola Perda condizionata dal fatto che gareggi Andrea ...).

Per calcolare la probabilità che la scuola vinca facendo gareggiare Andrea si moltiplicano le probabilità sui rami che collegano i nodi opportuni (quello di Andrea e quello del Vince). Possiamo scrivere in questo modo:

$$P(A \cap V) = P(A) \cdot P(V/A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{80}{100} = \frac{1}{5} \quad (\text{dove } A \text{ indica è stato sorteggiato Andrea e } V \text{ indica la scuola Vince}).$$

Per calcolare la probabilità di vittoria della scuola si sommano le probabilità su ogni singolo ramo che termina con una vittoria e quindi si ottiene:

$$P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V) + P(C \cap V) + P(D \cap V) = \frac{1}{4} \cdot \frac{80}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{90}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{75}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{70}{100} = 0,7875$$

Per rispondere alla seconda domanda è necessario utilizzare il teorema di Bayes.

La probabilità richiesta si potrebbe indicare con $P(C/V)$ cioè la probabilità che sia stato estratto Carlo sapendo che la scuola ha vinto.

Per il teorema sopra nominato si ottiene:

$$P(C/V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} \approx 0,238$$

Quindi si calcola il rapporto tra la probabilità sul ramo che porta alla vincita con estrazione di Carlo e la probabilità di Vincita.

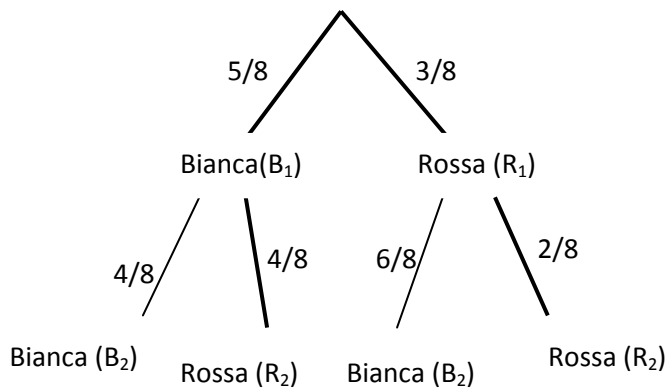
Esempio B

Una scatola contiene 5 palline bianche e 3 palline rosse. Andrea estrae una pallina e la toglie aggiungendo un'altra pallina dell'altro colore. A questo punto egli estrae una nuova pallina dalla scatola.

Qual è la probabilità che estragga alla fine una pallina rossa?

E qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca sapendo che la seconda pallina estratta è rossa?

Costruiamo l'albero che descrive la situazione (indicheremo con B_1 pallina bianca estratta alla prima estrazione e B_2 pallina bianca estratta alla seconda estrazione e in modo analogo per le palline rosse):



Quindi l'estrazione della pallina rossa può avvenire seguendo due rami (evidenziati nella figura) cioè:

$$P(R_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{32}$$

Per rispondere alla seconda domanda utilizziamo il teorema di Bayes.

$$P(B_1/R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{13}{32}} = \frac{10}{13}$$

Prove ripetute

Si lancia quattro volte un dado a sei facce.

Qual è la probabilità che la faccia 6 non esca mai?

Qual è la probabilità che la faccia 6 esca due volte?

Qual è la probabilità che la faccia 6 esca almeno una volta?

Chiamiamo con A l'evento: ESCE LA FACCIA 6.

Indicheremo con $\bar{A}$ l'evento contrario cioè: NON ESCE LA FACCIA 6

Quindi valutiamo la probabilità di A come $P(A) = \frac{1}{6}$ e $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{6}$

Quindi il primo evento si potrebbe indicare con $E = \bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A}$ quindi

$$P(E) = P(\bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Per rispondere alla seconda domanda osserviamo innanzi tutto che l'uscita della faccia 6 (quindi che si verifichi A) due volte può avvenire in diversi modi:

$$\begin{aligned} & A \cap A \cap \bar{A} \cap \bar{A} \\ & A \cap \bar{A} \cap A \cap \bar{A} \\ & \bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap A \\ & \bar{A} \cap A \cap A \cap \bar{A} \\ & \bar{A} \cap A \cap \bar{A} \cap A \\ & \bar{A} \cap \bar{A} \cap A \cap A \end{aligned}$$

Cioè la faccia 6 potrebbe uscire la prima e la seconda volta, la prima e la terza volta, la prima e la quarta volta

Quindi in tutto abbiamo $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$ possibilità e in ognuna di queste la probabilità si calcola facendo il prodotto $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$

Quindi la probabilità cercata è $\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$

Possiamo generalizzare il metodo sopra utilizzato in questo modo:

sia A un evento con probabilità p e sia $\bar{A}$ l'evento contrario che avrà probabilità $q = 1-p$.

La probabilità che in n prove l'evento A si verifichi k volte si calcola con la formula:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Per rispondere alla terza domanda osserviamo che l'evento descritto è l'evento contrario dell'evento E considerato al primo punto. Quindi

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,52$$

Esempio C

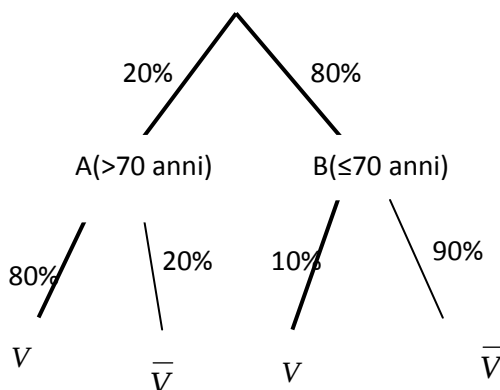
In una certa regione il 20% della popolazione ha più di 70 anni. Dagli archivi sanitari risulta che quest'anno sono stati vaccinati il 10% delle persone fino a 70 anni e l'80% delle persone sopra i 70 anni.

Scegliendo a caso una persona di quella regione, qual è la probabilità che essa sia vaccinata?

Si scelgono a caso 8 persone aventi più di 70 anni.

Qual è la probabilità che 5 di esse siano vaccinate?

Costruiamo l'albero che descrive la situazione:



Quindi (seguendo i rami che sono stati evidenziati) si ottiene

$$P(V) = \frac{20}{100} \cdot \frac{80}{100} + \frac{80}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{6}{25}.$$

Per rispondere alla seconda domanda usiamo le prove ripetute; impostiamo il problema osservando che $n=8$

$$p=80\%=\frac{4}{5}$$

$$q=20\%=\frac{1}{5}$$

$$k=5$$

$$\text{Dalla formula si ottiene: } P(X=5) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 56 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \approx 14,7\%$$

Esempio D

Nel gioco del Lotto ogni numero ha probabilità $\frac{1}{90}$ di essere estratto.

Quante estrazioni occorre effettuare affinché ci si possa aspettare con probabilità del 50% che il numero 6 esca almeno un volta?

Per risolvere il problema usiamo le prove ripetute;

$$p=\frac{1}{90}$$

$$q=\frac{89}{90}$$

Osserviamo innanzitutto che l'evento descritto (lo indicheremo con A) è il complementare dell'evento "il numero 6 non esce mai" ($K=0$)

Quindi si ha

$$P(\bar{A}) = P(X=0) = \left(\frac{89}{90}\right)^n$$

e quindi

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{89}{90}\right)^n.$$

Quindi cerchiamo n che rende questa probabilità $50\% = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{89}{90}\right)^n$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{89}{90}\right)^n$$

$$\text{e applicando i logaritmi} \quad n = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{89}{90}\right)} \approx 62,04.$$

Quindi servono 63 estrazioni (n deve essere un numero intero).