

# Polinomi

## Esempi ed esercizi

**Esempio 1.** Ripasso: Divisione euclidea fra polinomi.

Dati i due polinomi  $p(x) = 3x^4 - 5x^2 + 3$  e  $q(x) = 2x^2 - 1$ , calcolare quoziente e resto della divisione euclidea fra il primo e il secondo.

La tecnica dovrebbe essere nota dalla scuola. Il procedimento si può rappresentare come in figura:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^4 - 5x^2 + 3 & 2x^2 - 1 \\
 \underline{3x^4 - \frac{3}{2}x^2} & \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{4} \\
 -\frac{7}{2}x^2 + 3 & \\
 \underline{-\frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}} & \\
 \frac{5}{4} & 
 \end{array}$$

In definitiva,  $(3x^4 - 5x^2 + 3) = (2x^2 - 1)(\frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{4}) + (\frac{5}{4})$ .

**Esempio 2.** Teorema di Bezout: calcolare i polinomi  $m(x)$  ed  $n(x)$  tali che  $m(x)p(x) + n(x)q(x) = d(x)$ , dove  $p(x) = x^4 - 1$  e  $q(x) = x^2 + 2x + 1$ , mentre  $d(x)$  è un loro m.c.d..

Il metodo è lo stesso utilizzato per i numeri interi. Dividendo il polinomio di grado superiore (in questo caso  $p(x)$ ) per quello di grado inferiore (o uguale), otteniamo facilmente che  $x^4 - 1 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 3) + (-4x - 4)$ . Iterando ora il procedimento, otteniamo  $x^2 + 2x + 1 = (-4x - 4)(-x/4 - 4)$ . Se ne deduce quindi che  $(-4x - 4)$  è un m.c.d. fra  $p(x)$  e  $q(x)$  (non è difficile in effetti verificare che entrambi i polinomi contengono il binomio  $x + 1$ ). Scegliendo dunque  $d(x) = -4x - 4$ , si ha immediatamente  $d(x) = p(x) - q(x)(x^2 - 2x + 3)$  e quindi  $m(x) = 1$  e  $n(x) = -x^2 + 2x - 3$ .

**Esempio 3.** Trovare tutte le radici razionali del polinomio  $p(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12$ .

Le radici razionali di  $p(x)$  devono essere dei numeri  $\alpha = m/n$  dove  $m|12$  ed  $n|1$ . Possiamo quindi limitarci a tentativi con numeri interi e più precisamente con tutti i divisori (positivi e negativi) di 12.

Il teorema del resto ci dice poi che solo  $p(1) = p(3) = 0$ . Le radici cercate sono dunque 1 e 3.

Osservazione. Per non essere costretti a calcolare  $p(n)$  con  $n$  grande, possiamo, man mano che troviamo qualche radice  $\alpha$ , dividere il polinomio di partenza per  $x - \alpha$ , abbassando il grado del polinomio rimanente (e possibilmente anche il numero di tentativi necessari).

**Esempio 4.** Trovare tutti i polinomi  $p(x)$  di grado inferiore a 4 a coefficienti interi e tali che:

$$p(1) = 13$$

$$p(2) = 27$$

$$p(3) = 40.$$

Si ha innanzitutto:

$$(x - 1) | p(x) - 13$$

$$(x - 2) | p(x) - 27$$

$$(x - 3) | p(x) - 40.$$

La prima si può riscrivere come  $p(x) = (x - 1)p_1(x) + 13$ , dove  $p_1(x)$  sarà un polinomio di grado inferiore a 3 da individuare. Sostituendo quanto ottenuto nella seconda e terza condizione iniziale, si ha subito:

$$p_1(2) = 14$$

$$2 \cdot p_1(3) = 27$$

ma l'ultima non può portare a soluzioni, perché certamente  $p_1(3) \in \mathbb{Z}$ .

**Esempio 5.** Dato il polinomio  $x^3 - 5x^2 + 8x - 3$  e dette  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  le sue radici, calcolare  $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3$ .

Bisogna innanzitutto scrivere  $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 3$  come funzione di  $p_1(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ,  $p_2(\lambda) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$  e  $p_3(\lambda) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ . Si vede facilmente che  $p = p_1^3 - 3(p_1p_2 - p_3)$ .

In definitiva,  $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = 5^3 - 3(5 \cdot 8 - 3) = 14$ .

**Esercizio 1.** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione  $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1$  soggetta alla condizione  $x + y + z = 1$ .

**Esercizio 2.** Trovare i valori di  $a$  per i quali la somma dei quadrati delle radici dell'equazione  $x^2 - (a - 2)x - a - 1 = 0$  risulta minima.

**Esercizio 3.** Siano  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  le tre radici dell'equazione  $x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = 0$ . Trovare un polinomio che abbia come radici  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  e  $\gamma^2$ .

**Esercizio 4.** Siano  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  le radici del polinomio  $x^4 - 10x^3 + 15x - 3$ . Calcolare il valore di:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}.$$

**Esercizio 5.** Trovare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0.$$