

ESERCIZI PER L'ALLENAMENTO REGIONALE DEL 20 DICEMBRE 2013 CON SOLUZIONI

1. Il professor Precisetti è un esempio di pignoleria! Alle verifiche che propone ai suoi studenti assegna un peso in numeri interi positivi, ordinato da un valore minimo a un valore massimo. I pesi delle prime 9 tipologie di verifica formano una progressione aritmetica e la somma dei quadrati dei pesi di tali verifiche è pari al quadrato del peso della 10^a tipologia. Quanto vale la somma dei pesi minimi di tutte le tipologie di verifica?

Risposta: 126

SOLUZIONE

Sia x il peso della 5^o tipologia di verifica, d la ragione della progressione, y il peso della 10^o verifica; le nove tipologie di verifica hanno i seguenti pesi:

$$x-4d, x-3d, x-2d, x-d, x, x+d, x+2d, x+3d, x+4d.$$

Dalle condizioni poste dal problema, deve essere:

$$(x-4d)^2 + (x-3d)^2 + (x-2d)^2 + (x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2 + (x+2d)^2 + (x+3d)^2 + (x+4d)^2 = y^2.$$

Sviluppando i calcoli, si ottiene:

$$9x^2 + 60d^2 = y^2, \quad \text{da cui: } 3(3x^2 + 20d^2) = y^2 \quad \text{da cui: } 3x^2 + 20d^2 = \frac{y^2}{3}.$$

Da ciò si deduce che $y = 3z$. Quindi: $3x^2 + 20d^2 = 3z^2$ da cui: $d^2 = \frac{3z^2 - 3x^2}{20} = \frac{3(z^2 - x^2)}{20}$.

Ne consegue che anche d è multiplo di 3: $d = 3w$. Sostituendo si ottiene:

$$3x^2 + 20 \cdot (3w)^2 = 3z^2 \quad \text{da cui} \quad x^2 + 60w^2 = z^2, \quad \text{che si può scrivere:}$$

$$z^2 - x^2 = 60w^2 \quad \text{cioè} \quad (z-x)(z+x) = 60w^2 \quad (*).$$

Ora, la scomposizione di 60 in fattori interi, in modo che la somma di tali fattori sia un numero pari, dà come possibili risultati: 2 e 30, 6 e 10; infatti la relazione precedente può scriversi:

$$\begin{cases} z-x=20w \\ z+x=3w \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} z-x=30w \\ z+x=2w \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} z-x=10w \\ z+x=6w \end{cases} \quad \text{oppure} \\ \begin{cases} z-x=60w \\ z+x=w \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} z-x=15w \\ z+x=4w \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} z-x=12w \\ z+x=5w \end{cases} \quad \text{o viceversa}$$

Ma il primo, il quarto, il quinto e il sesto sistema sono da scartare perché conducono a valori di z non interi.

Dal secondo sistema si ottiene: $z = 16w$, da cui $y = 48w$; sostituendo nella (*) si ha:

$$256w^2 - x^2 = 60w^2 \quad \text{cioè} \quad 196w^2 = x^2 \Rightarrow x = 14w. \quad \text{così:}$$

$$\begin{cases} x=14w \\ y=48w \\ d=3w \end{cases} \quad \text{se } w=1 \Rightarrow \begin{cases} x=14 \\ y=48 \\ d=3 \end{cases} \quad \text{I soluzione.}$$

Dal terzo sistema si ottiene: $z = 8w$, da cui $y = 24w$; sostituendo nella (*) si ha:

$$64w^2 - x^2 = 60w^2 \quad \text{cioè} \quad 4w^2 = x^2 \Rightarrow x = 2w. \quad \text{così:}$$

$$\begin{cases} x=2w \\ y=24w \\ d=3w \end{cases} \quad \text{se } w=1 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=24 \\ d=3 \end{cases} \quad \text{II soluzione.}$$

Ora dalla I soluzione si hanno i seguenti pesi: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26; la loro somma è: $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 = 126$, la soluzione cercata!

Dalla II soluzione si hanno i seguenti pesi: -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14; tale soluzione non è accettabile perché negativa!

2. Come tutte le mattine, la prof.ssa Ritardini arriva tardi a scuola! Interrogata dal Dirigente Scolastico, prof.ssa Brontoloni, la docente sostiene di essere partita con largo anticipo da casa con la sua auto, ma nel tragitto casa – scuola deve superare ben 8 incroci! Quella mattina, appena uscita da casa, si è trovata davanti l'autobus di linea; per lo più, ad ogni incrocio, tra un veicolo proveniente dalla strada principale e il veicolo che lo segue, si sono inseriti altri due veicoli provenienti dall'incrocio. Quindi non è colpa sua se è arrivata in ritardo!! Ma il Dirigente Scolastico non crede a questa storiella! Quante sarebbero i veicoli inseritisi tra l'automobile della prof.ssa e l'autobus alla fine del percorso?

Risposta: 6560

SOLUZIONE

All'incrocio n-esimo, auto e autobus saranno separati dai seguenti veicoli:

$$x_n = x_{n-1} + 2(x_{n-1} + 1) = 3x_{n-1} + 2,$$

dove x_{n-1} è il numero di auto che separava la prof. all'incrocio n-1, con $x_0 = 0$.

Si ha:

$$x_n = 3x_{n-1} + 2 = 3(3x_{n-2} + 2) + 2 = 3^2 x_{n-2} + 8 = 3^2 (3x_{n-3} + 2) + 8 = 3^3 x_{n-3} + 26 = 3^3 x_{n-3} + 3^3 - 1 = \dots = 3^n x_0 + 3^n - 1 = 3^n - 1.$$

La soluzione, essendo $n = 8$, quindi è: $3^8 - 1 = 6560$.

3. È data una semicirconferenza Γ_1 di diametro $AB = 2$, si costruisca una successione di triangoli nel seguente modo:

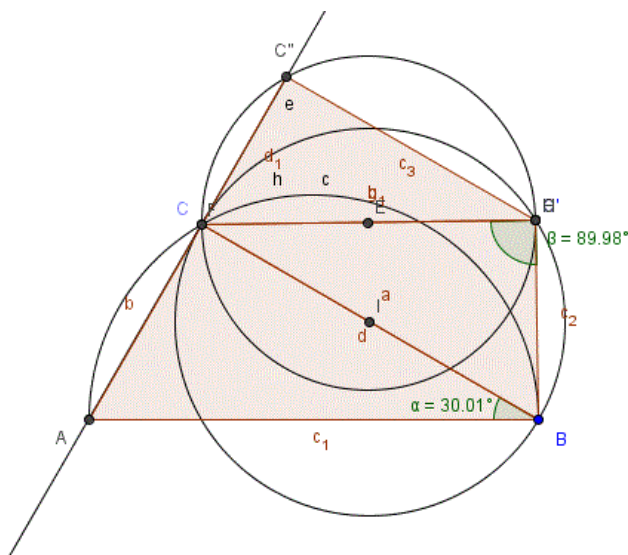
- T_1 è il triangolo ABC inscritto in Γ_1 , avente l'angolo in B di 30° ;
- T_2 è il triangolo BCC' inscritto nella circonferenza Γ_2 di diametro BC e che ha in comune con il triangolo ABC solo il segmento BC , essendo C' il punto d'intersezione di Γ_2 con la parallela ad AB per C ;
- T_3 è il triangolo $CC'C''$ inscritto nella semicirconferenza Γ_3 di diametro CC' e che ha in comune con il triangolo BCC' solo il segmento CC' , essendo l'angolo in C' di 30° ;
- T_4 è il triangolo $C'C''C'''$, inscritto nella semicirconferenza Γ_4 di diametro $C'C''$ e che ha in comune con il triangolo $CC'C''$ solo il segmento $C'C''$, essendo C''' il punto d'intersezione di Γ_4 con la parallela CC' per C'' ;
- E così via.

Detta A_n la successione delle aree dei triangoli dati, determinare l'esponente della ragione k a cui è elevato il prodotto dei termini da A_{62} a A_{113} .

Risposta: 4524

SOLUZIONE

$$A_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad A_{BCC'} = \frac{3\sqrt{3}}{8}; \quad A_{CC'C''} = \frac{9\sqrt{3}}{32}; \quad \text{ecc.}$$



La ragione k di tale successione geometrica è: $k = \frac{3}{4}$. Il generico termine della progressione è:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \text{da cui} \quad A_{62} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{61}, \quad A_{113} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{112}; \text{ quindi si ottiene:}$$

$$P = \sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{173}\right)^{113-62+1}} = \sqrt{\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{174}\right)^{52}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{4524}.$$

La soluzione è quindi 4524.

4. Il codice PIN di una carta bancomat è un numero di 5 cifre che si ottengono considerando

$$\text{i termini della successione} \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} \end{cases} \quad \text{per i valori di } n \text{ generati nell'ordine dal}$$

terzo, quinto, settimo e nono termine (tale nono termine è di due cifre e deve essere considerato tale, quindi occuperà le ultime due caselle del PIN) **della progressione aritmetica di termine generale b_n , di valore iniziale -1 e ragione $\frac{1}{2}$. Si scrivano le cifre nell'ordine, dalla prima trovata all'ultima, in modo da formare il PIN di 5 cifre. Calcolare la somma dei cubi delle cifre trovate.**

Risposta: 714

SOLUZIONE

La successione a_n è definita per ricorrenza, lineare, con $\alpha = 7$ e $\beta = -12$. Quindi l'equazione è: $x^2 - 7x + 12 = 0$, da cui si ha: $(x - 4)(x - 3) = 0$, per cui $S_1 = 4$ e $S_2 = 3$. Il termine generico a_r è dato da: $a_r = a \cdot 4^r + b \cdot 3^r$; se $r = 0$, allora $a + b = 0$; se $r = 1$, allora $4a + 3b = 1$. Mettendo a sistema le due equazioni precedenti, si ottengono i seguenti risultati: $a = 1$, $b = -1$, per cui si ha: $a_r = 4^r - 3^r$.

$$\text{Scriviamo la successione } b_n: \begin{cases} b_1 = -1 \\ b_n = b_{n-1} + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow b_n = b_1 + (n-1)d = -1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2};$$

Calcoliamo i termini richiesti dal problema:

$$b_3 = -1 + \frac{1}{2}(3-1) = -1 + 1 = 0;$$

$$b_5 = -1 + \frac{1}{2}(5-1) = -1 + 2 = 1;$$

$$b_7 = -1 + \frac{1}{2}(7-1) = -1 + 3 = 2;$$

$$b_9 = -1 + \frac{1}{2}(9-1) = -1 + 4 = 3.$$

$$a_0 = 4^0 - 3^0 = 0;$$

$$a_1 = 4^1 - 3^1 = 1;$$

Segue che:

$$a_2 = 4^2 - 3^2 = 7;$$

$$a_3 = 4^3 - 3^3 = 37.$$

Il codice PIN è dunque: 01737 e la somma dei cubi delle sue cifre vale:

$$0^3 + 1^3 + 7^3 + 3^3 + 7^3 = 714.$$

5. Un bosco è abitato da conigli “C” e da volpi “V”. I conigli hanno cibo vegetale in abbondanza e, se non ci fossero le volpi a cacciarli, crescerebbero ogni mese del 20%. Le volpi, invece, hanno i conigli come unico nutrimento e perciò hanno maggiore probabilità di catturarne quanto più questi ultimi sono numerosi. Per effetto di tale meccanismo, il numero di conigli C ogni mese diminuisce di un centesimo del prodotto tra C e V, mentre il numero di volpi V aumenta di un centesimo del numero di conigli C diminuito di 300. Per quali valori di C e V il fenomeno si stabilizza? Una volta calcolati i valori di C e V richiesti, la risposta da dare è il quoziente tra C e V trovati.

Risposta: 15

SOLUZIONE

Se si indica con C_i , V_i rispettivamente il numero di Conigli/Volpi al mese i-esimo, si ottengono le seguenti successioni:

$$C_{i+1} = (1 + 0,20)C_i - \frac{1}{100}C_iV_i$$

$$V_{i+1} = V_i + \frac{1}{100}(C_i - 300).$$

Il fenomeno si stabilizza se: $C_{i+1} = C_i$ e $V_{i+1} = V_i$, per cui si ha:

$$C_i = (1 + 0,20)C_i - \frac{1}{100}C_iV_i \Rightarrow 100 = 120 - \frac{V_i}{100} \Rightarrow V_i = 20;$$

$$V_i = V_i + \frac{1}{100}(C_i - 300) \Rightarrow 0 = \frac{1}{100}(C_i - 300) \Rightarrow C_i = 300.$$

La risposta al quesito è dunque 15.