

COMBINATORIA

Il **calcolo combinatorio** si propone di studiare i diversi raggruppamenti che si possono formare con un determinato numero di oggetti, detti “elementi”, di un dato insieme. In generale, si distingue fra:

- *Raggruppamenti senza ripetizioni o semplici*: sono quelli in cui non si può ripetere uno stesso elemento all'interno dello stesso gruppo;
- *Raggruppamenti con ripetizione*: sono quelli in cui si può ripetere uno stesso elemento all'interno dello stesso gruppo.

1. DISPOSIZIONI SEMPLICI

Dati n oggetti distinti e detto $k \leq n$ un numero naturale qualsiasi, si chiamano *disposizioni semplici di n oggetti a k a k o della classe k* tutti i raggruppamenti che si possono formare con gli n oggetti dati in modo che ogni raggruppamento ne contenga solo k tutti distinti tra loro e che due qualunque gruppi differiscano tra loro o per qualche elemento oppure per l'ordine con cui gli oggetti sono disposti.

Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti presi a k a k è dato dal prodotto di k fattori consecutivi decrescenti a partire da n :

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

ESEMPIO 1

In un cinema, una fila di poltrone ha 12 posti. Arrivano solo 5 persone a sedersi su quella fila. In quanti modi possono disporsi?

Risposta: 95040

SOLUZIONE: il numero cercato è dato dalle disposizioni di 12 elementi di classe 5:

$$D_{12,5} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040.$$

2. PERMUTAZIONI SEMPLICI

Dati n oggetti distinti, si chiamano *permutazioni semplici degli n oggetti* tutti i raggruppamenti che si possono formare con gli n oggetti dati in modo che ognuno di essi contenga tutti gli n elementi e differisca dagli altri solo per l'ordine degli elementi.

Dalla definizione risulta che le permutazioni semplici di n elementi non sono altro che le disposizioni semplici di n elementi presi ad n ad n ; indicato con P_n il numero delle permutazioni di n oggetti, si ha:

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Indicato con il simbolo “**n!**” (che si legge: “**n fattoriale**”) il prodotto di n fattori interi consecutivi decrescenti a partire da n , si ha quindi:

$$P_n = n!$$

N.B. Si pone per definizione $0! = 1$.

ESEMPIO 2

Quanti sono gli anagrammi di una parola di n lettere tutte diverse tra loro?

Risposta: $n!$

SOLUZIONE

Gli anagrammi sono proprio $n!$; infatti, ad esempio, gli anagrammi della parola COSA formata da 4 lettere diverse sono $4! = 24$, che si elencano in ordine alfabetico:

ACOS, ACSO, AOCS, AOSC, ASCO, ASOC, CAOS, CASO, COAS, COSA, CSAO, CSOA, OACS, OASC, OCAS, OCSA, OSAC, OSCA, SACO, SAOC, SCAO, SCOA, SOAC, SOCA.

3. COMBINAZIONI SEMPLICI

Dati n oggetti distinti e detto $k \leq n$ un numero naturale qualsiasi, si chiamano *combinazioni semplici di n oggetti a k a k o della classe k* tutti i raggruppamenti che si possono formare con gli n oggetti dati in modo che ogni raggruppamento ne contenga solo k tutti distinti tra loro e che due qualunque gruppi differiscano tra loro per almeno un elemento.

Il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k è dato da:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

A differenza delle *disposizioni*, per le quali *conta l'ordine*, per le *combinazioni l'ordine non conta*.
ESEMPIO 3

Una classe è composta da 21 alunni; il professor Rossi oggi decide di interrogarne 4 di Matematica; in quanti modi diversi può sceglierli?

Risposta: 5985

SOLUZIONE

Poiché in questo caso non conta l'ordine con cui vengono scelti gli elementi, in un insieme di n oggetti i modi per sceglierne un sottoinsieme di k è dato dalle combinazioni di n oggetti di classe k . In questo caso, $n = 21$, $k = 4$, quindi:

$$C_{21,4} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{4!} = 5985.$$

4. DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Dati n oggetti distinti, si chiamano *disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k* tutti i raggruppamenti che si possono formare con gli n oggetti dati in modo che in ogni raggruppamento lo stesso oggetto possa essere ripetuto k volte e che due qualunque gruppi differiscano tra loro o per un elemento oppure per l'ordine con cui gli oggetti sono disposti oppure per la ripetizione.

Il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k è dato da:

$$D'_{n,k} = n^k.$$

N.B. Può essere anche $k > n$.

ESEMPIO 4

Quanti numeri di tre cifre, anche ripetute, si possono formare con le cifre 0, 1, 3, 4, 7, 8?

Risposta: 180

SOLUZIONE

I numeri di tre cifre, anche ripetute, che si possono formare con 6 cifre date sono: $D'_{6,3} = 6^3 = 216$; da questi si devono sottrarre tutti i numeri che cominciano con lo zero, cioè $D'_{6,2} = 6^2 = 36$. In totale si ha: $216 - 36 = 180$.

5. PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Dati n oggetti non tutti distinti tra loro, ma con k_1 degli oggetti uguali fra loro, k_2 degli oggetti uguali fra loro, ..., k_r degli oggetti uguali fra loro (con $k_1 + k_2 + \dots + k_r \leq n$), si chiamano *permutazioni con ripetizione degli n oggetti* tutti i raggruppamenti che si possono formare con tali

oggetti in modo che due gruppi qualsiasi differiscano tra loro solo per l'ordine degli elementi in essi contenuti.

Il numero di tali permutazioni è dato da:
$$P_n^{(k_1; k_2; \dots; k_r)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}.$$

ESEMPIO 5

Quanti sono gli anagrammi della parola CARRO? E quelli della parola MATEMATICA?

Risposta: 60, 151.200

SOLUZIONE

Nel I caso in questione la parola contiene delle lettere ripetute, in particolare la lettera R è ripetuta due volte; usando la formula si ottiene:

$$P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Nel II caso la parola MATEMATICA contiene la lettera M ripetuta due volte, la lettera A ripetuta tre volte, la lettera T ripetuta due volte; si ha:

$$P_{10}^{(2;3;2)} = \frac{10!}{2!3!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{4 \cdot 3!} = 151.200.$$

6. COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Dati n oggetti distinti, si chiamano *combinazioni con ripetizione degli n oggetti di classe k* (anche maggiore di n) tutti i raggruppamenti contenenti k degli n oggetti dati in modo che in essi ciascun oggetto possa essere ripetuto fino a k volte e che due qualunque gruppi differiscano tra loro per almeno un elemento oppure per la ripetizione.

Il numero delle combinazioni con ripetizione di n oggetti distinti presi a k a k è dato da:

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{k!}.$$

Le combinazioni con ripetizione di n oggetti distinti presi a k a k sono tante quante le combinazioni semplici di $n + k - 1$ oggetti distinti presi a k a k .

ESEMPIO 6

In quanti modi diversi possiamo distribuire 8 caramelle a 5 bambini?

Risposta: 495

SOLUZIONE

In questo caso si tratta di combinazioni con ripetizione; usando la formula si ha:

$$C'_{5,8} = \binom{12}{8} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495.$$

SEMIFATTORIALE DI UN NUMERO

Si dice **semifattoriale** di un numero naturale n , indicato col simbolo $n!!$, il prodotto:

$$\begin{aligned} n!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n && \text{se } n \text{ è pari,} \\ n!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n && \text{se } n \text{ è dispari.} \end{aligned}$$

Valgono le seguenti relazioni: $(2n)!! = 2^n \cdot n!$

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

COEFFICIENTI BINOMIALI

Per indicare il numero delle combinazioni semplici di n oggetti di classe k si può usare anche il simbolo $\binom{n}{k}$ che si legge “ n su k ” e prende il nome di **coefficiente binomiale**. Si ha quindi:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Si pone, per convenzione: $\binom{n}{0} = 1$; inoltre si ha: $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.

I coefficienti binomiali godono delle seguenti proprietà:

- Legge dei tre fattoriali $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Legge delle classi complementari $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Legge di Stiefel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- Legge di ricorrenza $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

SVILUPPO DELLA POTENZA DI UN BINOMIO

La potenza n -esima (n interi positivo) del binomio $(a+b)$ è data dal seguente sviluppo del binomio, detto **formula di Newton**:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Tale sviluppo fornisce un polinomio completo, omogeneo di grado n , con $n+1$ termini in a e b ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b , i cui coefficienti sono ordinatamente i coefficienti binomiali per $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n$:

n	Coefficiente
1	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$
2	$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$
3	$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$

..	
n-1	$\binom{n-1}{0} \binom{n-1}{1} \binom{n-1}{2} \dots \binom{n-1}{n-2} \binom{n-1}{n-1}$
n	$\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \dots \binom{n}{n-2} \binom{n}{n-1} \binom{n}{n}$
..	

Tale quadro gode di importanti proprietà: ad esempio, in ogni riga i termini estremi valgono 1 e i termini equidistanti dagli estremi sono fra loro uguali; inoltre il termine che sta nella n-esima riga e di posto $k + 1$, cioè $\binom{n}{k}$, è dato dalla somma dei due termini della riga (n-1)-esima e che occupano

i posti $k + 1$ e k ; cioè risulta: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Il quadro si può quindi costruire a partire dalla

prima riga:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	3	1		
1	5	10	10	5	1	
.....						

Tale quadro si chiama **triangolo aritmetico o di Tartaglia**.

N.B. Il binomio di Newton può essere scritto anche così:

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} \frac{n!}{i!j!} x^i y^j.$$

Con questa notazione, si può scrivere anche il **trinomio di Newton**:

$$(x + y + z)^n = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

ESERCIZI

ESERCIZIO 1

Una password è costituita da 6 caratteri, ciascuno dei quali può essere una delle 21 lettere dell'alfabeto italiano. Quante password si possono costruire che iniziano con una consonante e terminano con una vocale, essendo formate da tutte lettere distinte tra loro?

Risposta: 7.441.920

SOLUZIONE

Dovendo essere la prima casella una consonante, si hanno 16 casi diversi di inizio password; analogamente dovendo essere l'ultima casella una vocale, si hanno 5 casi diversi di fine password; le altre 4 caselle restanti vanno riempite con le 19 lettere dell'alfabeto. Quindi il numero totale di password che si possono costruire è: $P = 16 \cdot 5 \cdot D_{19,4} = 80 \cdot 93024 = 7.441.920$.

ESERCIZIO 2

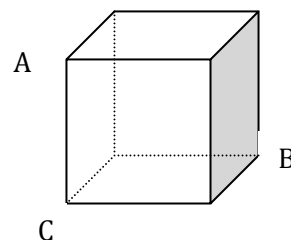
Quanti sono i percorsi diversi che connettono due vertici opposti A e B di un cubo, formati da spigoli dello stesso e che passano una e una sola volta per tutti i vertici?

Risposta: 6

SOLUZIONE

Partendo da A si hanno tre possibili scelte, poi se ad esempio si è arrivati in C si hanno due possibili scelte. A questo punto, dovendo toccare tutti i vertici e non ripassare nei vertici già toccati, il percorso è obbligato.

Quindi ci sono $3 \cdot 2 = 6$ percorsi possibili.



ESERCIZIO 3

Quanti dadi diversi si possono ottenere colorando le facce di un cubo di bianco o di nero?

Risposta: 10

SOLUZIONE

Esistono 10 dadi diversi e precisamente:

uno tutto bianco

uno tutto nero

uno con una faccia bianca

uno con una faccia nera

due con due facce bianche (o adiacenti o opposte)

due con due facce nere (o adiacenti o opposte)

due con tre facce nere e tre bianche (in un caso le tre facce nere hanno un vertice in comune, nell'altro no).

ESERCIZIO 4

Sette persone si siedono attorno ad un tavolo rotondo; in quanti modi diversi si possono disporre?

Risposta: 720

SOLUZIONE

Le permutazioni di 7 persone in fila sono $7!$. Intorno ad un tavolo rotondo però la permutazione è circolare. Infatti, indicando le 7 persone con le prime 7 lettere dell'alfabeto, si ha che gli allineamenti:

a b c d e f g

b c d e f g a

c d e f g a b

d e f g a b c

e f g a b c d

f g a b c d e

g a b c d e f

corrispondono ad una stessa disposizione delle 7 persone su un tavolo rotondo (dove non esistono un primo e un ultimo posto). Quindi il numero di permutazioni si ottiene dividendo quelle totali per 7, cioè:

$$\frac{7!}{7} = 6! = 720.$$

ESERCIZIO 5

Una mamma compera 4 giacche e 3 pantaloni per i suoi due gemelli. I capi di vestiario sono tutti diversi tra loro. Quando escono insieme in quanti modi possono presentarsi vestiti i due ragazzi? (si considerino i due gemelli indistinguibili).

Risposta: 72

SOLUZIONE

Il primo gemello può vestirsi in $4 \cdot 3 = 12$ modi, per ognuno di questi il secondo gemello può scegliere tra $3 \cdot 2 = 6$ possibili abbinamenti (ovviamente dopo che il primo gemello si è vestito, il secondo può scegliere tra 3 giacche e 2 pantaloni). Quindi in totale si hanno $12 \cdot 6 = 72$ possibili abbinamenti.

ESERCIZIO 6

Un poligono regolare ha n lati e $4n$ diagonali. Quanto vale n ?

Risposta: 11

SOLUZIONE

In un poligono di n lati ci sono n vertici. Il numero delle diagonali è $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ perché ogni

vertice può essere collegato a $n-3$ vertici per ottenere una diagonale (togliendo da n il vertice che si sta considerando e i due vertici ad esso adiacenti, con i quali non si ottiene una diagonale ma un lato) e occorre poi dividere per 2 perché, ad esempio, la diagonale AD è uguale alla diagonale DA.

Quindi ponendo $\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 4n$ si ottiene $n = 11$ (la soluzione $n = 0$ non è accettabile).

ESERCIZIO 7

Un pallone di cuoio è ottenuto cucendo 20 pezzi di cuoio a forma esagonale con 12 pezzi di cuoio a forma pentagonale. Una cucitura unisce due lati di pezzi adiacenti. Quante sono in tutto le cuciture?

Risposta: 90

SOLUZIONE



Per gli esagoni ci sono in tutto $20 \cdot 6 = 180$ cuciture, per i pentagoni $12 \cdot 5 = 60$ cuciture.

Quindi in totale ci sono $\frac{180 + 60}{2} = 90$ cuciture

(considerato che ogni cucitura è adiacente a due poligoni ed è stata contata 2 volte).

ESERCIZIO 8

Tre paia di calzini, uno rosso, uno blu e uno verde, sono stesi in fila. Sapendo che due calzini dello stesso colore non sono vicini uno all'altro, quante successioni di colori si possono avere?

Risposta: 30

SOLUZIONE

Per i primi due posti si hanno $3 \cdot 2 = 6$ possibili scelte. A questo punto ci sono due casi: o il terzo calzino ha un colore diverso dai primi due oppure ha lo stesso colore del primo. Immaginiamo che i primi due calzini siano RB (rosso e blu); se il terzo è verde, i restanti tre calzini si possono disporre in tutti i modi tranne quello che inizia con il verde (cioè BRV, BVR, RVB, RBV), cioè in quattro

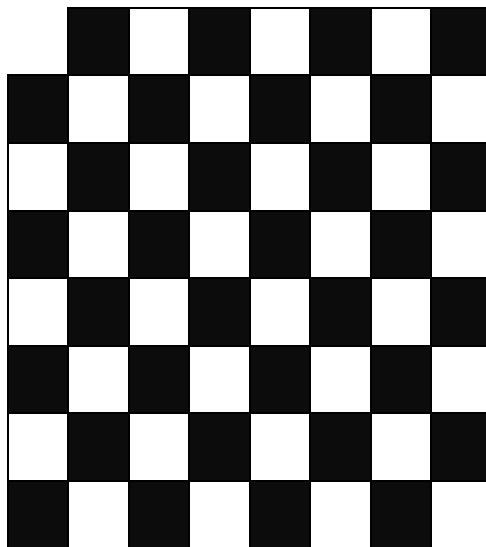
modi. Se il terzo calzino è rosso, allora c'è solo una possibilità per ottenere la sequenza (RBRVBV). In tutto quindi ci sono 5 possibili combinazioni che iniziano per RB. Considerando tutte le possibili scelte iniziali per i primi due calzini si avrà $6 \cdot 5 = 30$ possibilità in tutto.

ESERCIZIO 9

In una scacchiera con 64 caselle (bianche e nere) si tolgono due caselle che si trovano agli estremi di una diagonale. Sarebbe possibile in questo caso ricoprire la scacchiera con tasselli rettangolari di dimensione 2×1 (cioè che corrispondono a due caselle della scacchiera)?

Risposta: NON È POSSIBILE!

SOLUZIONE



Tasselli:

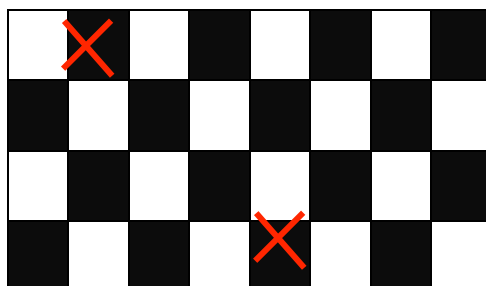


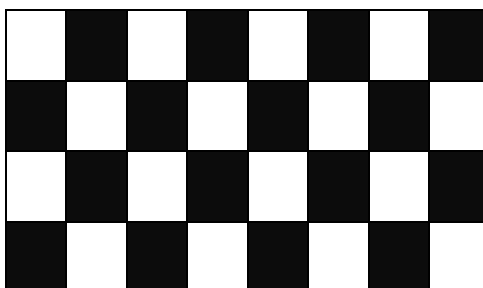
Poiché i tasselli sono di forma rettangolare e nella scacchiera le caselle nere e bianche sono adiacenti, i tasselli si possono disporre solo su due caselle di colore diverso. Nella scacchiera sono state tolte due caselle dello stesso colore quindi ci sono 30 caselle bianche e 32 caselle nere. Con i tasselli si possono ricoprire 30 coppie di caselle (bianche e nere) ma resteranno sempre fuori due caselle dello stesso colore (nel nostro caso nere) quindi la copertura è impossibile.

ESERCIZIO 10

Si generalizzi in problema precedente togliendo alla scacchiera due caselle qualsiasi. In quale caso sarà possibile ricoprirla con tasselli 2×1 ?

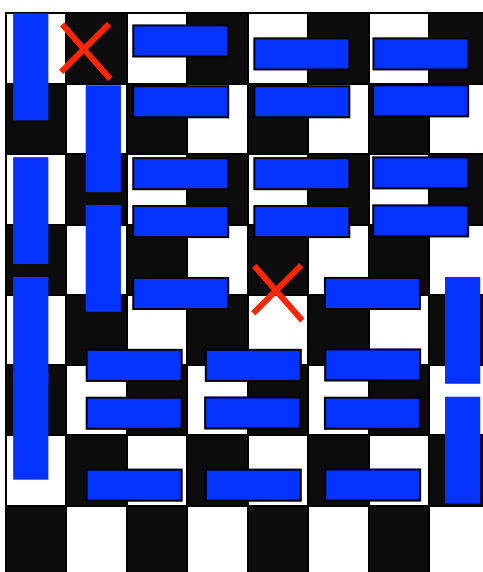
SOLUZIONE



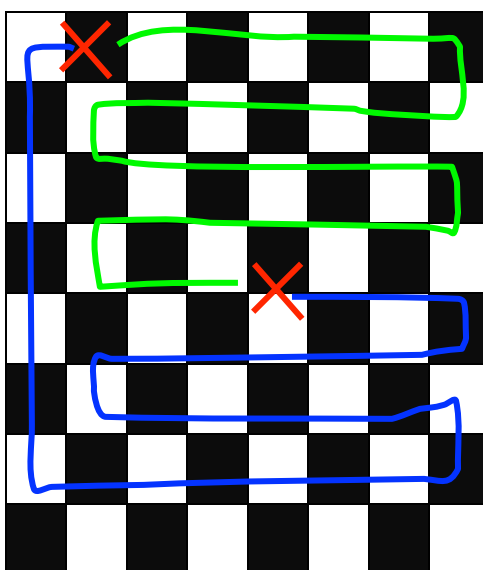


Ovviamente l'operazione è impossibile se si tolgono due caselle dello stesso colore (come dimostrato nell'esercizio 8).

Ma se si tolgono due caselle di colore diverso? Si dimostra che è sempre possibile ricoprire la scacchiera (come nell'esempio che segue).

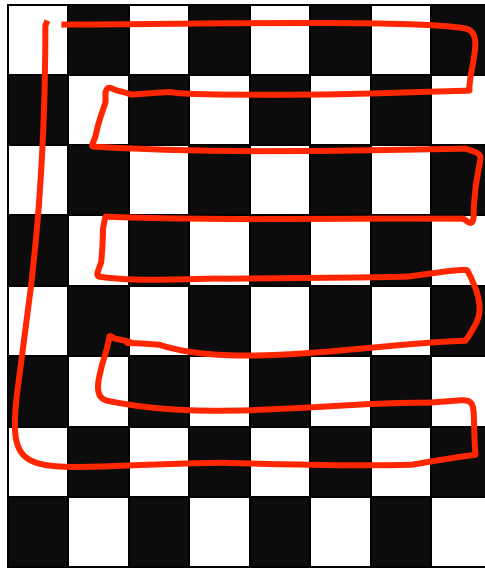


Si costruiscano due percorsi su caselle adiacenti che partono da una casella tolta e arrivino all'altra in modo che siano toccate tutte le caselle della scacchiera (come in figura). Questi percorsi partono sempre da un colore e terminano nell'altro passando sempre attraverso caselle di colore diverso. Quindi è possibile posizionare i tasselli in modo da ricoprire la scacchiera privata delle due caselle di colore diverso.



È sempre possibile trovare i due percorsi sopra considerati? La risposta è affermativa e si può dimostrare considerando che su una scacchiera è sempre possibile determinare un percorso chiuso

che permetta di attraversare tutte le caselle e che passi su caselle adiacenti. Si consideri ad esempio il percorso sotto disegnato.



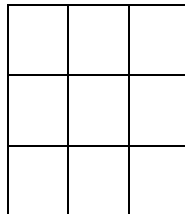
Togliendo due caselle qualsiasi di colore diverso si otterranno due percorsi con le caratteristiche di quelli sopra considerati e quindi sarà possibile ricoprire la scacchiera con i tasselli rettangolari.

ESERCIZIO11

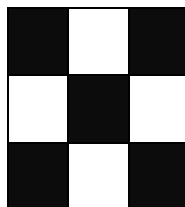
Si consideri una scacchiera con 9 quadrati e la si riempia con i numeri da 1 a 9 in modo tale che due numeri consecutivi siano su caselle adiacenti. Quali numeri si possono trovare nella casella centrale?

Risposta: 5

SOLUZIONE



Per risolvere il problema conviene colorare le caselle di bianco e nero come in una scacchiera (nel nostro caso abbiamo ottenuto 5 caselle nere e 4 bianche).



In questo modo due caselle adiacenti sono sempre di colore diverso. Considerando che da 1 a 9 ci sono 5 numeri dispari e 4 numeri pari, possiamo associare alle 5 caselle nere un numero dispari e alle 4 caselle bianche un numero pari. Osservando che la casella centrale è nera si conclude che in questa casella si possono disporre solo numeri dispari.

Per completare l'esercizio è necessario controllare che tutti i numeri dispari possono essere disposti nella casella centrale e per far questo è sufficiente fare degli esempi.

3	4	5
2	1	6
9	8	7

1	4	5
2	3	6
9	8	7

1	2	3
6	5	4
7	8	9

9	6	5
8	7	4
1	2	3

7	6	5
8	9	4
1	2	3

ESERCIZIO 12

In quanti modi diversi si possono disporre 4 oggetti DIVERSI in 6 scatole in modo tale che ogni scatola possa contenere più di un oggetto?

Risposta: 1296

SOLUZIONE

Convieni numerare le scatole (1 2 3 4 5 6) e abbinare ai quattro oggetti (messi in ordine) una scatola. Se indichiamo con A B C D i quattro oggetti si avrà:

6 possibili scelte per l'oggetto A

6 possibili scelte per l'oggetto B

6 possibili scelte per l'oggetto C

6 possibili scelte per l'oggetto D

Quindi in totale si avrà $D_{6,4}^* = 6^4 = 1296$ (disposizioni con ripetizione di 6 oggetti distinti di classe 4).

Generalizzando: in quanti modi è possibile disporre n oggetti DIVERSI in k scatole?

In $D_{k,n}^* = k^n$ modi (disposizioni con ripetizione di k oggetti distinti di classe n).

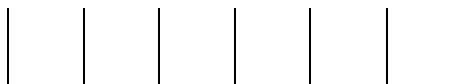
ESERCIZIO 13

In quanti modi diversi si possono disporre 4 oggetti UGUALI in 6 scatole in modo tale che ogni scatola possa contenere più di un oggetto?

Risposta: 126

SOLUZIONE

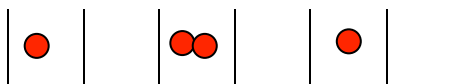
Se gli oggetti sono indistinguibili si avrà un numero inferiore di disposizioni. Come ottenere la soluzione? Convieni rappresentare la situazione nel seguente modo: si considerino le 6 scatole



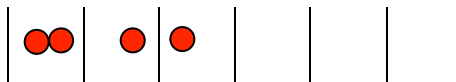
e si rappresentino gli oggetti tutti uguali (ad esempio con delle sfere):



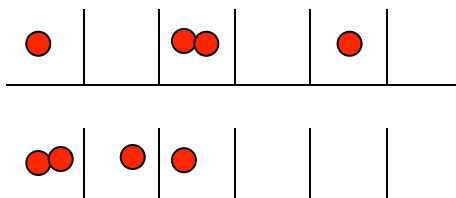
Se disponiamo le sfere nelle scatole si può ottenere ad esempio:



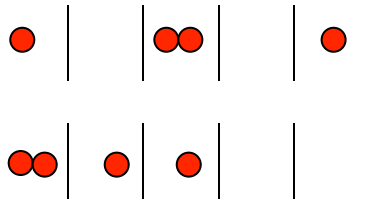
oppure



Se togliamo alle scatole le due linee verticali che si trovano all'inizio e alla fine, le situazioni precedenti si potrebbero schematizzare nel seguente modo:



o meglio, togliendo anche la linea orizzontale



A questo punto si può osservare che tutte le possibili disposizioni degli oggetti nelle scatole corrispondono alle possibili permutazioni di 9 oggetti dei quali 4 sono uguali (sfere rosse) e 5 sono uguali (linee verticali)



e precisamente (usando la formula delle permutazioni con ripetizioni): $P_9^{4,5} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$.

Generalizzando: in quanti modi è possibile disporre n oggetti UGUALI in k scatole?

In $P_{n+k-1}^{n,k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n! \cdot (k-1)!}$ modi, le permutazioni con ripetizione di $n+k-1$ elementi di cui n ripetuti e $k-1$ ripetuti.

PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE

Il principio di inclusione-esclusione permette di calcolare il numero di elementi dell'unione di un numero finito di insiemi finiti qualsiasi.

Siano A, B insiemi finiti, con cardinalità rispettivamente n e m ; in simboli: $\{A\}=n, \{B\}=m$.

Se A, B hanno elementi comuni, cioè se $A \cap B \neq \emptyset$, la somma delle singole cardinalità di A e B non coincide con la cardinalità dell'unione $A \cup B$, in quanto in tale somma gli elementi comuni sono contati 2 volte.

Si deve quindi applicare la formula:

$$\{A \cup B\} = \{A\} + \{B\} - \{A \cap B\} \quad (\text{principio di inclusione-esclusione per 2 insiemi finiti})$$

Tale principio di inclusione-esclusione si può estendere facilmente a più di 2 insiemi. Se per esempio sono dati 3 insiemi finiti A, B, C , per calcolare la cardinalità della loro unione, usando le proprietà insiemistiche dell'unione e dell'intersezione e usando il principio di inclusione-esclusione nel caso di 2 insiemi, si ha:

$$\begin{aligned} \{A \cup B \cup C\} &= \{A \cup (B \cup C)\} = \{A\} + \{B \cup C\} - \{A \cap (B \cup C)\} = \{A\} + \{B \cup C\} - \{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} = \\ &= \{A\} + \{B\} + \{C\} - \{B \cap C\} - [\{A \cap B\} + \{A \cap C\} - \{A \cap B \cap C\}] = \\ &= \{A\} + \{B\} + \{C\} - [\{A \cap B\} + \{A \cap C\} + \{B \cap C\}] + \{A \cap B \cap C\} \end{aligned}$$

e si ottiene quindi la formula del **principio di inclusione-esclusione nel caso di 3 insiemi finiti**:

$$\{A \cup B \cup C\} = \{A\} + \{B\} + \{C\} - [\{A \cap B\} + \{A \cap C\} + \{B \cap C\}] + \{A \cap B \cap C\}$$

Esiste una formula generale per il caso di **n insiemi** (che si dimostra con il principio di induzione, ma della quale si omette la dimostrazione): se sono dati n insiemi finiti $A_1, A_2, \dots, A_n$, la cardinalità della loro unione si calcola con la formula:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

l'ultimo addendo è preceduto da un segno $+$ se n è dispari, da un segno $-$ se n è pari.

UTILIZZO DEL PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE

1. Sia dato un insieme finito A e n diverse proprietà $P_1, P_2, \dots, P_n$ che possono essere soddisfatte dagli elementi di A . Se vogliamo contare il numero degli elementi di A che **soddisfano almeno una** delle n proprietà, ciò equivale a costruire per ogni $i = 1, 2, \dots, n$ l'insieme X_i degli elementi di A che soddisfano la proprietà P_i , e calcolare la cardinalità dell'unione $\{X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n\}$, servendosi della formula del principio di inclusione-esclusione.

Esempio: Sia A l'insieme di tutte le parole di lunghezza 7 sull'alfabeto $\{a, b, c, d\}$. Risolviamo il problema di contare il numero delle parole di A che soddisfano almeno una delle seguenti 3 proprietà: 1) la prima lettera della parola è c ; 2) la seconda lettera della parola è b ; 3) l'ultima lettera della parola è a .

A tale scopo dobbiamo costruire gli insiemi degli elementi di A che soddisfano singolarmente le 3 proprietà:

$X_1 = \{ x \in A \mid \text{la prima lettera della parola } x \text{ è } c \}$

$X_2 = \{ x \in A \mid \text{la seconda lettera della parola } x \text{ è } b \}$

$X_3 = \{ x \in A \mid \text{l'ultima lettera della parola } x \text{ è } a \}$

e calcolare, con la formula del principio di inclusione-esclusione, la cardinalità dell'unione di questi tre insiemi:

$$\{X_1 \cup X_2 \cup X_3\} = (\{X_1\} + \{X_2\} + \{X_3\}) - (\{X_1 \cap X_2\} + \{X_1 \cap X_3\} + \{X_2 \cap X_3\}) + \{X_1 \cap X_2 \cap X_3\}.$$

Per quanto riguarda le singole cardinalità, si ottengono i valori:

$\{X_1\} = \{X_2\} = \{X_3\} = D'_{4,6} = 4^6$, $\{X_1 \cap X_2\} = \{X_1 \cap X_3\} = \{X_2 \cap X_3\} = D'_{4,5} = 4^5$, $\{X_1 \cap X_2 \cap X_3\} = D'_{4,4} = 4^4$. Quindi la risposta al problema è: $\{X_1 \cup X_2 \cup X_3\} = 3 \cdot 4^6 - 3 \cdot 4^5 + 4^4 = 4^4(48 - 12 + 1) = 256 \cdot 37 = 9472$.

2. Sia dato un insieme finito A ed n diverse proprietà $P_1, P_2, \dots, P_n$ che possono essere soddisfatte dagli elementi di A . Se vogliamo contare il numero degli elementi di A che **non soddisfano nessuna** delle n proprietà, ciò equivale a costruire per ogni $i = 1, 2, \dots, n$ l'insieme X_i degli elementi di A che soddisfano la proprietà P_i e calcolare la cardinalità del complementare dell'unione $\{X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n\}$, cioè calcolare la differenza $\{X\} - \{X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n\}$, usando la formula del principio di inclusione-esclusione.

Esempio

Supponiamo di avere n lettere per n destinatari diversi con le corrispondenti n buste e di effettuare un "imbustamento" mettendo ogni lettera in una busta (lettere diverse in buste diverse). In quanti modi diversi si può effettuare un imbustamento totalmente errato, cioè in cui nessuna lettera va nella busta corretta corrispondente?

Possiamo numerare le lettere e le buste da 1 ad n (lettera e busta corrispondente con lo stesso numero) e rappresentare ogni imbustamento come una funzione biunivoca

$$f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

L'insieme A di tutti gli imbustamenti coincide con l'insieme di tutte le suddette funzioni biunivoche, di cardinalità $n!$.

Ogni imbustamento totalmente errato è una funzione $f \in A$ che non soddisfi nessuna delle seguenti n proprietà: $f(1) = 1$; $f(2) = 2$; ... ; $f(n) = n$.

Costruiamo quindi n insiemi $A_1 = \{f \in A \mid f(1) = 1\}$; $A_2 = \{f \in A \mid f(2) = 2\}$; ...; $A_n = \{f \in A \mid f(n) = n\}$.

La risposta al quesito sarà: $\{A\} - \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\}$.

Per il principio di inclusione-esclusione si ha:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Si ha $\{A_1\} = \{A_2\} = \dots = \{A_n\} = (n-1)!$, dunque $\sum_{i=1}^n |A_i| = (n-1)! \cdot n = n!$.

Inoltre $\{A_1 \cap A_2\} = (n-2)!$, e ciò vale per cardinalità dell'intersezione di 2 qualunque degli insiemi. Le possibili intersezioni a 2 a 2 corrispondono alle combinazioni semplici di n insiemi presi a 2 a 2,

quindi sono in numero di $\binom{n}{2}$.

Si ha allora: $\sum_{i < j} |A_i \cap A_j| = (n-2)! \binom{n}{2} = (n-2)! \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2!}$.

Con ragionamenti analoghi si ha: $\sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n!}{3!}$; ...; $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = \frac{n!}{n!} = 1$.

Dunque il numero di imbustamenti totalmente errati è:

$\{A\} - \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\} = n! - (n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \dots \pm \frac{n!}{n!}) = \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} + \dots \pm 1$ (dove l'ultimo addendo 1 ha il segno + se n è pari, il segno - se n è dispari).

Esempio: se il numero delle lettere e delle buste è $n=5$, il numero di imbustamenti totalmente errati è: $5!/2! - 5!/3! + 5!/4! - 5!/5! = 60 - 20 + 5 - 1 = 44$.

ESERCIZI

1. Quanti sono i numeri compresi tra 1 e 1000 che sono divisibili per 5, per 6, per 8?

SOLUZIONE

Sia S l'insieme $\{1, 2, \dots, 1000\}$. La proprietà P_1 è quella di essere divisibile per 5. La proprietà P_2 è quella di essere divisibile per 6. La proprietà P_3 è quella di essere divisibile per 8. Abbiamo che $|A_1| = 1000/5 = 200$, $|A_2| = 1000/6 = 166$, $|A_3| = 1000/8 = 125$.

Un numero è in $A_1 \cap A_2$ se è divisibile per il minimo comune multiplo di 5 e 6, ossia per $\text{mcm}\{5, 6\} = 30$. Analogamente si ragiona per i numeri in $A_1 \cap A_3$ (divisibili per $\text{mcm}\{5, 8\} = 40$) e i numeri in $A_2 \cap A_3$ (divisibili per $\text{mcm}\{6, 8\} = 24$). Si ha: $|A_1 \cap A_2| = 1000/30 = 33$, $|A_1 \cap A_3| = 1000/40 = 25$, $|A_2 \cap A_3| = 1000/24 = 41$. Infine, un numero è in $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ se è divisibile per il minimo comune multiplo di 5, 6 e 8, ossia per $\text{mcm}\{5, 6, 8\} = 120$. Si ha $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1000/120 = 8$.

In conclusione, si hanno $(200 + 166 + 125) - (33 + 25 + 41) + 8 = 400$ numeri del tipo desiderato.

2. In un test vengono forniti 6 definizioni e altrettanti termini da collegare alla definizione corrispondente. Purtroppo il candidato non è molto preparato e non sa assolutamente nulla dell'argomento. Quante sono le possibilità di sbagliare tutti i collegamenti?

SOLUZIONE

Si può applicare il principio di inclusione-esclusione: rappresentando ogni collegamento definizione-termini con una funzione biunivoca del tipo: $f: \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}$, l'insieme A di tutti i collegamenti coincide con l'insieme di tutte le suddette funzioni biunivoche, di cardinalità $6!$. Ogni collegamento totalmente errato è una funzione $f \in A$ che non soddisfi nessuna delle seguenti 6 proprietà: $f(1) = 1$; $f(2) = 2$; ...; $f(6) = 6$. Si costruiscono così 6 insiemi $A_1 = \{f \in A / f(1) \neq 1\}$; $A_2 = \{f \in A / f(2) \neq 2\}$; ...; $A_6 = \{f \in A / f(6) \neq 6\}$.

La risposta al quesito sarà: $\{A\} - \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_6\}$. Ma $\{A_1\} = \{A_2\} = \dots = \{A_6\} = 5!$, dunque

$\sum_{i=1}^6 |A_i| = (6-1)! \cdot 6 = 6!$. Inoltre $\{A_1 \cap A_2\} = (6-2)! = 4!$, e ciò vale per la cardinalità dell'intersezione di 2

qualunque degli insiemi. Le possibili intersezioni a 2 a 2 corrispondono alle combinazioni semplici

di 6 insiemi presi a 2 a 2, quindi sono in numero di $\binom{6}{2}$.

Si ha allora: $\sum_{i < j} |A_i \cap A_j| = (6-2)! \cdot \binom{6}{2} = (4)! \cdot \frac{6!}{2!4!} = \frac{6!}{2!}$.

Con ragionamenti analoghi si ha: $\sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{6!}{3!}$; ...; $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = \frac{6!}{6!} = 1$.

Dunque il numero di imbustamenti totalmente errati è: $\{A\} - \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_6\} = 6! - (6! - \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{3!} - \frac{6!}{4!} + \frac{6!}{5!} - \frac{6!}{6!}) = \frac{6!}{2!} - \frac{6!}{3!} + \frac{6!}{4!} - \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{6!} = 6! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \right) = 720 \cdot \frac{360 - 120 + 30 - 6 + 1}{720} = 265$.