

ALCUNI TEOREMI SUI POLINOMI E LORO APPLICAZIONE

Un **polinomio** a coefficienti reali nella indeterminata x è un'espressione formale del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Al polinomio è associata in modo naturale una funzione polinomiale, più precisamente la funzione $P(x)$, che alla variabile reale x associa il numero reale:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

Si definisce **grado** di un polinomio il massimo esponente della x che compare nel polinomio (cioè il massimo esponente della x il cui coefficiente correlato non è nullo). Nel caso del polinomio (1), il suo grado è n a patto che $a_n \neq 0$.

Si definisce **radice** di un polinomio un numero α tale che $P(\alpha) = 0$.

Si definisce polinomio **monico** un polinomio del tipo $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, ovvero un polinomio di grado n che ha 1 come coefficiente di x^n .

DIVISIONE EUCLIDEA TRA POLINOMI

È possibile effettuare la divisione euclidea tra due polinomi. In particolare, se $a(x)$ e $b(x)$ sono due polinomi, allora esistono e sono unici due polinomi $q(x)$ e $r(x)$ tali che:

- $b(x) = a(x) q(x) + r(x)$;
- il grado di $r(x)$ è minore del grado di $q(x)$.

Per ottenere i due suddetti polinomi si può effettuare una normale divisione in colonna, nel corso della quale ad ogni passaggio si eguaglia il termine di grado massimo per permetterne la semplificazione.

SCOMPONIBILITÀ DI POLINOMI

La scomposizione di polinomi è l'operazione inversa della moltiplicazione e varia a seconda dell'insieme di appartenenza dei coefficienti. In particolare, un polinomio che non può essere espresso come prodotto di due polinomi aventi grado maggiore di 1 si dice *irriducibile*, altrimenti è detto *riducibile*. Valgono i seguenti risultati:

- se l'insieme considerato è quello dei numeri razionali $\mathbf{Q}$, è possibile scomporlo tramite le radici razionali, le quali possono essere trovate in maniera piuttosto agevole. Inoltre, si può provare che, dato $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, polinomio a coefficienti interi, se esiste un primo p tale che p non divide a_n , p divide i coefficienti $a_{n-1}, \dots, a_0$ e p^2 non divide a_0 , allora $f(x)$ è irriducibile in $\mathbf{Q}[x]$: questo risultato è noto come criterio di Eisenstein. Purtroppo non esiste una caratterizzazione dei polinomi irriducibili: ne esistono di qualsiasi grado (ad esempio, $p(x) = x^n + 2$ è irriducibile per qualsiasi scelta di n);
- se l'insieme considerato è quello dei numeri reali $\mathbf{R}$, ogni polinomio è sempre riducibile come prodotto di più polinomi irriducibili di grado 1 oppure di grado 2 con discriminante negativo. Purtroppo non esiste un procedimento che, a priori, permetta tale scomposizione;
- se l'insieme considerato è quello dei numeri complessi $\mathbf{C}$, ogni polinomio è sempre riducibile come prodotto di più polinomi irriducibili di primo grado. Questo fatto è noto come teorema fondamentale dell'algebra.

Inoltre è opportuno conoscere queste regole pratiche:

1. Un polinomio di primo grado è sempre irriducibile.
2. Per i polinomi di secondo grado esiste una formula che consente di calcolare le relative radici (e quindi scomporre il polinomio): se $P(x) = ax^2 + bx + c$, le radici sono:

$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. La quantità $b^2 - 4ac$ è detta *discriminante* e, nel caso in cui questo sia negativo, il polinomio non ammette soluzioni reali.

3. Ogni polinomio con coefficienti razionali può essere ricondotto ad un polinomio con coefficienti interi: basta moltiplicare per il minimo comune multiplo dei denominatori.

PRODOTTI NOTEVOLI

In generale, scomporre un polinomio non è un compito agevole, ma spesso necessario per la risoluzione dei problemi. È bene perciò tenere presenti i cosiddetti prodotti notevoli, cioè espressioni polinomiali che possono essere facilmente scomposte.

- o $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$
- o $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2)$
- o $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$
- o $(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3ax^2 \pm 3a^2x \pm a^3$
- o $ax^2 + bx + c = \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$

Generalizzando:

- o $x^{2n} - a^{2m} = (x^n + a^m)(x^n - a^m)$
- o $x^{2n+1} \pm a^{2n+1} = (x \pm a)(x^{2n} \mp x^{2n-1}a + x^{2n-2}a^2 \pm x^{2n-3}a^3 + \dots + x^2a^{2n-2} \mp xa^{2n-1} + a^{2n})$
- o $(a + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n$

La terza formula è il famoso **sviluppo del binomio di Newton**, dove il simbolo $\binom{n}{k}$ si chiama

coefficiente binomiale e si calcola: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

TEOREMA DI RUFFINI

Un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ è divisibile per un binomio $(x - \alpha)$ se e solo se α è radice di $P(x)$.

Se $P(x)$ ha radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ rispettivamente di molteplicità $k_1, k_2, \dots, k_s$, con $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$, allora $P(x)$ si può scomporre in fattori lineari come:

$$P(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_s)^{k_s}.$$

RELAZIONI TRA RADICI E COEFFICIENTI DEI POLINOMI

Sia $P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio monico di grado n . Si ricorda che un polinomio monico ha il primo coefficiente uguale a 1. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ le sue radici (in generale complesse), ripetute secondo la loro molteplicità; allora:

$$\begin{aligned}
-a_{n-1} &= \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \\
a_{n-2} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \cdot \lambda_j \\
-a_{n-3} &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \lambda_k \\
&\vdots \\
&\vdots \\
(-1)^n a_0 &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.
\end{aligned}$$

Nel caso in cui il polinomio non sia monico, basta dividere il polinomio per il coefficiente di grado massimo e ricondursi al caso precedente.

CASO PARTICOLARE $n = 2$:

un polinomio di secondo grado si può scrivere nella forma: $x^2 - Sx + P$ in cui $S = \lambda_1 + \lambda_2$, $P = \lambda_1 \lambda_2$.

CASO PARTICOLARE $n = 3$:

un polinomio di terzo grado si può scrivere nella forma: $x^3 - Sx^2 + Qx - P$ in cui $S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $Q = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3$, $P = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

Anche le somme di potenze di radici hanno delle regolarità particolari, infatti se poniamo $S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k$, avremo che:

$$\begin{aligned}
S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \dots + a_{n-k}S_1 &= 0 \quad \text{se } 1 \leq k \leq n; \\
S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \dots + a_0S_{k-n} &= 0 \quad \text{se } k > n.
\end{aligned}$$

Queste relazioni prendono il nome di FORMULE DI NEWTON.

CASO PARTICOLARE $n = 2$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = S \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = S^2 - 2P.$$

CASO PARTICOLARE $n = 3$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = S \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = S^2 - 2Q \quad \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = S^3 - 3SQ + 3P.$$

ESEMPIO

Dato il polinomio $p(x) = 7x^3 + 2x + 1$, calcolare S_1 , S_2 e S_3 .

SOLUZIONE

Occorre trasformare il polinomio dato in uno monico. Sia dunque $\tilde{p}(x) = x^3 + \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}$.

Utilizzando le formule si ottiene:

$$S_1 = -a_2 = 0,$$

$$S_2 = a_2^2 - 2a_1 = -2\frac{2}{7} = -\frac{4}{7},$$

$$S_3 = -a_2^3 + 3a_1a_2 - 3a_0 = -3\frac{1}{7} = -\frac{3}{7}.$$

LE FORMULE DI VIÈTE

Teorema: Sia

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

un polinomio a coefficienti reali di grado n e siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ le sue radici (in genere complesse), ripetute con la loro molteplicità. Allora

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$\vdots$

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

In generale:

$$S_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

E' evidente che le formule di Viète forniscono ogni possibile relazione tra le varie radici di un polinomio **anche quando non è possibile calcolarle esplicitamente**.

ESEMPI SULLE FORMULE DI VIÈTE E DI NEWTON

Le **formule di Newton** e le **formule di Viète** sono strumenti fondamentali per i partecipanti alle Olimpiadi della Matematica.

ESEMPIO 1: determinare la somma delle potenze quattordicesime delle radici dell'equazione

$$x^7 - x - 1 = 0$$

Soluzione: riscriviamo il tutto come

$$x^7 = x + 1$$

Elevo tutto al quadrato

$$x^{14} = x^2 + 2x + 1$$

Poste dunque le radici del polinomio, possiamo dire che

$$\sum_{j=1}^7 x_j^{14} = \sum_{j=1}^7 x_j^2 + 2 \sum_{j=1}^7 x_j + \sum_{j=1}^7 1$$

Le formule di Viète ci dicono che

$$\sum_{k=1}^n x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Ma a_{n-1} è il coefficiente di x^6 , uguale a zero, di conseguenza la sommatoria con la sola x vale zero e possiamo eliminarla.

$$\sum_{j=1}^7 x_j^{14} = \sum_{j=1}^7 x_j^2 + \sum_{j=1}^7 1$$

Adesso, posto $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_7^k$, intervengono le formule di Newton le quali ci dicono che

$$s_k + a_{n-1}s_{k-1} + \dots + a_{n-k+1}s_1 = -ka_{n-k}$$

Nel nostro caso $k = 2$ e $n = 7$, di conseguenza è chiaro che il tutto si restringe a

$$s_2 + a_6 s_{k-1} = -2a_5$$

Ma a_5 e a_6 valgono zero di conseguenza

$$s_2 = 0$$

Così tutto si riduce a

$$\sum_{j=1}^{14} x_j^{14} = \sum_{j=1}^7 1 = 7$$

ESEMPIO 2: dato il polinomio

$$p(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x + 6$$

dette $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ le sue radici, calcolare il valore dell'espressione:

$$\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4} + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4} + \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$$

Soluzione: l'espressione scritta così richiede calcoli troppo astrusi e noi non vogliamo certo complicarci la vita! Per questo iniziamo con il minimo comune multiplo

$$\frac{\lambda_4 + \lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$$

Guardate bene questa espressione: non è molto più semplice? Al numeratore abbiamo infatti la somma delle quattro radici, al denominatore il prodotto perciò possiamo sfruttare le **formule di Viète** per calcolare le espressioni singolarmente.

$$\lambda_4 + \lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_1 = -\frac{3}{1} = -3$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = (-1)^4 \cdot \frac{6}{1} = 6$$

Andiamo a sostituire per trovare che

$$\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4} + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4} + \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Successioni e Progressioni

Una **successione** è una **sequenza ordinata di numeri appartenenti ad un insieme assegnato**: ad esempio, si possono avere successioni di numeri interi, razionali, reali, complessi. Il primo elemento della sequenza viene, convenzionalmente, chiamato a_0 , il secondo a_1 e così via; a_n è il termine generale.

I modi in cui vengono di norma descritte le successioni sono due:

1. **con una legge**: ciascun termine a_n è assegnato mediante una funzione che, in generale, dipende da n . Ad esempio, $a_n = 2n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$, è la successione dei numeri dispari;
2. **ricorsivamente**: ciascun termine a_n è assegnato mediante una funzione ricorsiva che, in generale, dipende dai termini precedenti $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$. Ad esempio, la successione

definita da
$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} \quad \text{con } n > 1$$
 è la celeberrima **successione di Fibonacci**:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Una categoria che merita un più accurato esame è quella delle progressioni, successioni dipendenti linearmente dal solo termine precedente.

Progressioni aritmetiche

Una successione di numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$ si dice **progressione aritmetica** se è definita ricorsivamente

nel seguente modo:
$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_n = a_{n-1} + d \end{cases}$$

cioè se la differenza tra due termini consecutivi è costante ed uguale alla ragione d della progressione. Sulle progressioni aritmetiche si possono dimostrare facilmente le seguenti formule:

- Il termine generale a_n si può esprimere come $a_n = a_1 + (n - 1) d$.
Infatti, poichè : $a_2 - a_1 = d$; $a_3 - a_2 = d$; $a_n - a_{n-1} = d$, sommando membro a membro si ottiene: $a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \dots + a_n - a_{n-1} = (n - 1)d$, da cui si ha: $-a_1 + a_n = (n - 1)d$.
- Il generico termine a_r si può esprimere come $a_r = a_s + (r - s) d$.
Infatti: $a_r = a_{r-1} + d = a_{r-2} + 2d = \dots = a_s + (r - s) d$.
- La somma dei primi n termini è: $S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n$.
Infatti si scrive S_n a partire dal primo termine aggiungendo d fino al termine n -esimo: $S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + a_n$. Ora si scrive S_n a partire dal termine n -esimo sottraendo d fino al primo termine: $S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + a_1$. Sommando membro a membro si ottiene: $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) = (a_1 + a_n)n$.
- La somma dei termini da a_r a a_s è: $S = \frac{1}{2}(a_r + a_s)(r - s + 1)$.
Infatti $a_r + a_s = (a_{r+1} - d) + (a_{s-1} + d) = a_{r+1} + a_{s-1}$, e dunque: $2S = 2(a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_{s-2} + a_{s-1} + a_s) = (a_r + a_s) + (a_{r+1} + a_{s-1}) + \dots + (a_{s-1} + a_{r+1}) + (a_s + a_r) = (a_r + a_s)(r - s + 1)$.

Esempio 1

Data la successione: $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 7 \end{cases}$, scrivere il decimo termine della successione a_{10} in termini del terzo termine a_3 e calcolare la somma dei termini compresi tra questi 2.

SOLUZIONE

Si ha $a_{10} = a_3 + (10 - 3) \cdot 7 = a_3 + 49$; la somma dei termini dal quarto al nono è

$$S = \frac{1}{2}(a_4 + a_9)(9 - 4 + 1) = \frac{1}{2}(a_1 + 21 + a_1 + 56) \cdot 6 = 246.$$

Progressioni geometriche

Una successione di numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$ si dice **progressione geometrica** se è definita

ricorsivamente nel seguente modo:
$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_n = k \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

cioè se il rapporto tra due termini consecutivi è costante ed uguale alla ragione k della progressione. Sulle progressioni geometriche si possono dimostrare facilmente le seguenti formule:

- Il termine generale a_n si può esprimere come
$$a_n = a_1 k^{n-1}$$

Infatti: $a_2 = ka_1, a_3 = ka_2,$

$\dots, a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot \underbrace{k \cdot \dots \cdot k}_{(n-1) \text{ volte}},$ da cui $a_n = a_1 k^{n-1}.$ $a_{n-1} = ka_{n-2}, a_n = ka_{n-1}.$
Moltiplicando membro a membro si ottiene:

- Il generico termine a_r si può esprimere come
$$a_r = a_s k^{(r-s)}$$

Infatti: $a_r = ka_{r-1} = k^2 a_{r-2} = \dots = k^{(r-s)} a_s.$

- La somma dei primi n termini è:
$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Infatti: $a_2 = ka_1, a_3 = ka_2 = k^2 a_1, \dots, a_{n-1} = k^{n-2} a_1, a_n = k^{n-1} a_1.$

Quindi: $S_n = a_1 + \dots + a_n = a_1 + ka_1 + k^2 a_1 + \dots + k^{n-1} a_1.$

Moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza sopra scritta per k e sottraendo S_n si ottiene:

$kS_n - S_n = ka_1 + k^2 a_1 + \dots + k^n a_1 - a_1 - ka_1 - k^2 a_1 - \dots - k^{n-1} a_1 = k^n a_1 - a_1.$ La tesi.

- La somma dei termini da a_r a a_s è:
$$S = a_r \frac{k^{(s-r+1)} - 1}{k - 1}.$$

Infatti: $S = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_{s-1} + a_s = a_r (1 + k + k^2 + \dots + k^{(s-r-1)} + k^{(s-r)}) = a_r \frac{k^{(s-r+1)} - 1}{k - 1}.$

- Il prodotto di n termini è:
$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}.$$

Infatti: $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$

Per la proprietà commutativa del prodotto si può scrivere:

$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1.$

Moltiplicando membro a membro si ottiene: $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot \dots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1);$

ma ogni fattore del prodotto sopra scritto gode della **proprietà** che il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed è uguale al prodotto dei termini estremi: se p, r sono i termini equidistanti dagli

estremi, è $p \cdot r = a_1 \cdot a_n$. Pertanto: $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$ da cui $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}.$

- Il prodotto dei termini da a_r a a_s è:
$$P = \sqrt{(a_r \cdot a_s)^{(r-s+1)}}.$$

Infatti: $P^2 = a_r a_s \cdot a_{r+1} a_{s-1} \cdot \dots \cdot a_{s-1} a_{r+1} \cdot a_s a_r = (a_r \cdot a_s)^{(r-s+1)}.$

Esempio 2

Data la successione: $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 7a_{n-1} \end{cases}$, scrivere il decimo termine della successione a_{10} in termini del

terzo termine a_3 e calcolare la somma dei termini compresi tra questi 2. Calcolare inoltre il prodotto dei primi 3 termini.

SOLUZIONE

Si ha $a_{10} = a_3 \cdot 7^{(10-3)} = a_3 \cdot 7^7$; la somma dei termini dal quarto al nono è:

$$S = a_4 \frac{7^{(9-4+1)} - 1}{7-1} = 1715 \cdot \frac{117648}{6} = 33627720.$$

Il prodotto dei primi 3 termini è: $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_3)^{(3-1+1)}} = \sqrt{(5 \cdot 245)^3} = 42875.$

Progressioni miste

Una successione di numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$ si dice **progressione mista** se non è nè geometrica, nè aritmetica, ma è definita ricorsivamente nel seguente modo: $\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_n = k \cdot a_{n-1} + d \end{cases}$ con $k \neq 1, d \neq 0.$

Per le progressioni miste è valida la seguente formula, della quale si omette la dimostrazione:

il generico termine a_r si può esprimere come: $a_r = k^r a_0 + \frac{k^r - 1}{k - 1} d.$

Esempio 3

Data la successione: $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 7a_{n-1} + 6 \end{cases}$, scrivere il decimo termine della successione a_{10} in termini del terzo termine a_3 .

SOLUZIONE

Si ha $a_{10} = a_3 \cdot 7^{(10-3)} + 6 \cdot \frac{7^{(10-3)} - 1}{7-1} = 77 \cdot 7^7 + 6 \cdot \frac{7^7 - 1}{6} = 78 \cdot 7^7 - 1 = 64.236.353.$

Successioni per ricorrenza lineari

Nella successione $\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_1 = x_1 \\ x_{n+1} = \alpha \cdot x_n + \beta \cdot x_{n-1} \end{cases}$

sono dati i primi due termini e ciascuno dei successivi dipende dai due termini immediatamente precedenti. Esiste un metodo per scrivere il termine generico x_r in modo che dipenda solo da r . Si risolve innanzitutto l'equazione $x^2 - \alpha x - \beta = 0$. Se le due soluzioni S_1 e S_2 sono distinte, allora si può dimostrare che $x_r = a \cdot S_1^r + b \cdot S_2^r$, con a e b coefficienti opportuni. Per trovare a e b , si sostituisce prima $r = 0$ e poi $r = 1$ nell'espressione di x_r , ottenendo un sistema di due equazioni in a, b che si risolve utilizzando i valori noti di x_0 e x_1 . Se invece le soluzioni coincidono, cioè se $S_1 = S_2 = S$, allora si può dimostrare che $x_r = a \cdot S^r + b \cdot r \cdot S^r = (a + b \cdot r) S^r$, con a e b coefficienti opportuni che si determinano come nel caso precedente.

Esempio 4

Data la seguente successione, detta successione di Fibonacci: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \end{cases}$

ricavare l'espressione del termine generico x_r .

SOLUZIONE

Si tratta della successione 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Qui $\alpha = \beta = 1$, quindi si deve risolvere

dapprima $x^2 - x - 1 = 0$. Le soluzioni sono diverse: $S_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $S_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Quindi

$x_r = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^r + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^r$. Se $r = 0$ allora $0 = a + b$ cioè $b = -a$; se $r = 1$ allora

$$1 = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = a\sqrt{5} \text{ e quindi } a = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e } b = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Si può scrivere ora: $x_r = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^r - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^r \right)$.

Nota bene: sommando numeri naturali si ottengono numeri naturali, quindi nonostante compaiano radici nell'espressione di x_r , queste si semplificano sempre quando si sviluppano le potenze.

Esempio 5

Data la seguente successione: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1} \end{cases}$, ricavare l'espressione del termine generico x_r .

SOLUZIONE

Si tratta della successione 0, 1, 5, 19, 65, Qui $\alpha = 5$ e $\beta = -6$, quindi si deve risolvere dapprima $x^2 - 5x + 6 = 0$. Le soluzioni sono diverse: $S_1 = 3$ e $S_2 = 2$. Quindi $x_r = a \cdot 3^r + b \cdot 2^r$. Se $r = 0$ allora $0 = a + b$ cioè $b = -a$; se $r = 1$ allora $1 = 3a + 2b = 3a - 2a = a$ e quindi $a = 1$ e $b = -1$. Segue che $x_r = 3^r - 2^r$.

Esempio 6

Data la seguente successione: $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_1 = 21 \\ x_{n+1} = 6x_n - 9x_{n-1} \end{cases}$, calcolare $\frac{x_{88}}{3^{88}}$.

SOLUZIONE

Conviene scrivere il termine generico. Poiché $\alpha = 6$ e $\beta = -9$, l'equazione $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$ ha due soluzioni coincidenti $S_1 = S_2 = S = 3$. Quindi $x_r = a \cdot 3^r + b \cdot r \cdot 3^r$. Se $r = 0$ allora $2 = a$; se $r = 1$ allora $21 = 3a + 3b = 6 + 3b$ e quindi $a = 2$ e $b = 5$. Segue che $x_r = 2 \cdot 3^r + 5 \cdot r \cdot 3^r = (2 + 5r) \cdot 3^r$. Per

trovare il risultato basta adesso sostituire $r = 88$, ottenendo $x_{88} = 442 \cdot 3^{88}$ e $\frac{x_{88}}{3^{88}} = 442$.

ESERCIZI SU PROGRESSIONI E SUCCESSIONI CON SOLUZIONI

1. Data la successione:
$$\begin{cases} a_1=5 \\ a_n = a_{n-1} - 1 \end{cases}$$

a) calcolare la somma dei primi 11 termini;

b) esprimere, mediante il quinto termine della successione, a_{12} .

Risposta:

SOLUZIONE

a) La somma dei primi 11 termini è:

$$S_{11} = \frac{1}{2}(a_1 + a_{11})11 = \frac{11}{2}(a_1 + a_1 + (11-1)(-1)) = \frac{11}{2}(5 + 5 - 10) = 0.$$

$$b) a_{12} = a_5 + (12 - 5)(-1) = a_5 - 7.$$

2. Data la successione:
$$\begin{cases} a_1=3 \\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} \end{cases}$$

a) calcolare la somma dei primi 7 termini;

b) calcolare la somma dei termini dal terzo al sesto;

c) calcolare il prodotto dei primi 4 termini;

d) calcolare il prodotto dei termini dal terzo al sesto;

e) esprimere, mediante il secondo termine della successione, a_5 .

Risposta: si veda sotto

SOLUZIONE

$$a) S_7 = a_1 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 3 \frac{1 - \frac{1}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{381}{64}.$$

$$b) S = a_3 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(6-3+1)} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\frac{1}{16} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{45}{32}.$$

$$c) P_4 = \sqrt{(a_1 \cdot a_4)^4} = \sqrt{\left(3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^4} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64}.$$

$$d) P = \sqrt{(a_3 \cdot a_6)^{(6-3+1)}} = \sqrt{(a_1 k^2 \cdot a_1 k^5)^4} = (a_1^2 \cdot k^7)^2 = 3^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} = \frac{3^4}{2^{14}}.$$

$$e) a_5 = a_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{a_2}{8}.$$

3. Data la successione:
$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1 \end{cases}$$

a) calcolare la somma dei primi 4 termini;

b) esprimere, mediante il secondo termine della successione, a_{10} .

Risposta: si veda sotto

SOLUZIONE

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 + \frac{1}{2}a_1 + 1 + \frac{1}{2}a_2 + 1 + \frac{1}{2}a_3 + 1 = 6 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_1 + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_2 + 1\right) =$$

a)
$$6 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{2} = 7 + \frac{9}{4} + \frac{5}{8} = \frac{79}{8}.$$

b)
$$a_{10} = a_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(10-2)} + 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(10-2)} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{a_2}{256} + \frac{225}{128}.$$

4. Sia a_n la successione definita da:
$$\begin{cases} a_0 = x \\ a_n = 2a_{n-1} - 1 \end{cases}$$
. Sapendo che $a_{2000} = 2^{2001} + 1$, quanto vale

x ?

Risposta: 3

SOLUZIONE

$$a_{2000} = 2^{2000} \cdot x + \frac{2^{2000} - 1}{2 - 1} \cdot (-1) = 2^{2000} \cdot x - 2^{2000} + 1 \Rightarrow 2^{2000} \cdot x - 2^{2000} + 1 = 2^{2001} + 1$$

$$2^{2000} \cdot (x - 1) = 2^{2001} \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3.$$

5. Calcolare la somma dei numeri che compongono le terne formate da tre elementi che sono in progressione aritmetica (crescente o decrescente) e sono tali che la loro somma sia 27, il loro prodotto sia 585.

Risposta: 54

SOLUZIONE

Sia x il termine centrale e y la ragione della progressione; si ha che i tre numeri richiesti saranno del tipo: $x - y$, x , $x + y$. Quindi:

$$\begin{cases} x - y + x + x + y = 27 \\ (x - y)x(x + y) = 585 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 9(x^2 - y^2) = 585 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y^2 = 16 \Rightarrow y = 4 \end{cases}.$$

La I terna soluzione è 5, 9, 13; la II terna è 13, 9, 5. La risposta è quindi: $2(5 + 9 + 13) = 54$.

6. Determinare il numero n dei termini di una progressione aritmetica la cui somma è 136, la cui ragione è 6 e il cui termine generale vale 38.

Risposta: 8

SOLUZIONE

Si può impostare il seguente sistema:

$$\begin{cases} 136 = \frac{n \cdot (a_1 + 38)}{2} \\ 38 = a_1 + (n - 1) \cdot 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 272 = n \cdot a_1 + 38 \cdot n \\ 38 = a_1 + 6n - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 44n - 6n^2 + 38n - 272 = 0 \\ 44 - 6n = a_1 \end{cases} \text{ da cui: } \begin{cases} n = 8 \\ a_1 = -4 \end{cases}.$$

7. Il professor Generosi ha 12 figli. Per Natale compera loro dei cioccolatini. Sapendo che il primogenito ne mangia la metà più uno, il secondogenito mangia la metà di quelli che

trova più uno, il terzogenito la metà di quelli che trova più uno, fino all'ultimo figlio, il dodicesimo, che mangia la metà dei cioccolatini trovati più uno, lasciando la confezione vuota, quanti cioccolatini ha comperato il prof. Generosi?

Risposta: 8190

SOLUZIONE

Sia x_0 il numero dei cioccolatini iniziali; il primo figlio ne lascia al secondo

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0}{2} - 1 = \frac{x_0 - 2}{2};$$

$$\text{Il secondo ne lascia al terzo: } x_2 = x_1 - \frac{x_1}{2} - 1 = \frac{x_1 - 2}{2} = \frac{\frac{x_0 - 2}{2} - 2}{2} = \frac{x_0 - 2 - 2^2}{4} \dots$$

$$\text{Per l'ultimo figlio è: } x_{13} = x_{12} - \frac{x_{12}}{2} - 1 = \frac{x_{12} - 2}{2} = \frac{x_0 - 2 - 2^2 - \dots - 2^{12}}{2^{12}} = 0 \text{ da cui si ha:}$$

$x_0 = 2 + 2^2 + \dots + 2^{12}$, ma questa è una progressione geometrica di ragione 2 e si deve calcolare la somma dei primi 12 termini: $x_0 = 2^{13} - 2 = 8190$. [Infatti $S_{12} = a_1 \frac{2^{12} - 1}{2 - 1} = 2(2^{12} - 1)$.]

- 8. La combinazione per aprire una cassaforte è data da una sequenza di quattro numeri ottenuti considerando i termini della successione $a_n = n^2 - n$ per i valori di n generati**

nell'ordine dal quarto, sesto, nono, undicesimo termine della successione $\left\{ \begin{matrix} b_0=1 \\ b_1=3 \\ b_r=3b_{r-1}-2b_{r-2} \end{matrix} \right.$; quindi, di ogni a_n trovato, si consideri la somma delle cifre, che deve essere effettuata finchè non ci si riduce ad un numero di una sola cifra. Qual è la combinazione della cassaforte?

Risposta: 3939

SOLUZIONE

La seconda successione è definita per ricorrenza, lineare, con $\alpha = 3$, $\beta = -2$; quindi si deve risolvere l'equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$, da cui $(x - 2)(x - 1) = 0$, da cui $S_1 = 2$, $S_2 = 1$. Il termine generico è: $x_r = a \cdot S_1^r + b \cdot S_2^r = a \cdot 2^r + b \cdot 1^r = a \cdot 2^r + b$. Ora, se $r = 0$, $x_0 = a + b$; se $r = 1$, $x_1 = 2a + b$, da cui:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}. \text{ Allora: } x_r = 2 \cdot 2^r - 1 \Rightarrow b_n = 2^{n+1} - 1.$$

Dunque si ha $b_4 = 2^5 - 1 = 31$, $b_6 = 2^7 - 1 = 127$, $b_9 = 2^{10} - 1 = 1023$, $b_{11} = 2^{12} - 1 = 4095$.

Sostituendo in a_n si ha:

$$a_4 = 31^2 - 31 = 930$$

il I numero della combinazione è: $9 + 3 = 12 = 1 + 2 = 3$;

$$a_6 = 127^2 - 127 = 16002$$

il II numero della combinazione è: $1 + 6 + 2 = 9$;

$$a_9 = 1023^2 - 1023 = 1045506$$

il III numero della combinazione è: $1 + 4 + 5 + 5 + 6 = 21 = 2 + 1 = 3$;

$$a_{11} = 4095^2 - 4095 = 16764930 \text{ il IV numero della combinazione è: } 1 + 6 + 7 + 6 + 4 + 9 + 3 = 36 = 3 + 6 = 9.$$

La combinazione è quindi: 3939.

- 9. In una matrice di 4 righe per 13 colonne sono memorizzate le 52 carte di un mazzo da gioco: i semi (cuori = 1, quadri = 2, fiori = 3, picche = 4) sulle righe, le carte (Asso = 1, ..., Fante = 11, Donna = 12, Re = 13) sulle colonne. Si decide di scoprire le carte che sono memorizzate nelle caselle di posto (a_n, b_n) , dove $a_n = (n + 2) \bmod 4 + 1$, $b_n = (n + 5) \bmod 13 + 1$. [N.B. $P \bmod Q$ è il resto della divisione $P:Q$] Calcolare la differenza tra la somma delle cifre di**

posto pari e la somma delle cifre di posto dispari del prodotto dei numeri associati alle prime 10 carte scoperte.

Risposta: 0

SOLUZIONE

Si costruisce la seguente tabella per individuare le prime 10 carte scoperte:

n = 1	$a_1 = 3 \bmod 4 + 1 = 4$	$b_1 = 6 \bmod 13 + 1 = 7$	
n = 2	$a_2 = 4 \bmod 4 + 1 = 1$	$b_2 = 7 \bmod 13 + 1 = 8$	
n = 3	$a_3 = 5 \bmod 4 + 1 = 2$	$b_3 = 8 \bmod 13 + 1 = 9$	
n = 4	$a_4 = 6 \bmod 4 + 1 = 3$	$b_4 = 9 \bmod 13 + 1 = 10$	
n = 5	$a_5 = 7 \bmod 4 + 1 = 4$	$b_5 = 10 \bmod 13 + 1 = 11$	
n = 6	$a_6 = 8 \bmod 4 + 1 = 1$	$b_6 = 11 \bmod 13 + 1 = 12$	
n = 7	$a_7 = 9 \bmod 4 + 1 = 2$	$b_7 = 12 \bmod 13 + 1 = 13$	
n = 8	$a_8 = 10 \bmod 4 + 1 = 3$	$b_8 = 13 \bmod 13 + 1 = 1$	
n = 9	$a_9 = 11 \bmod 4 + 1 = 4$	$b_9 = 14 \bmod 13 + 1 = 2$	
n = 10	$a_{10} = 12 \bmod 4 + 1 = 1$	$b_{10} = 15 \bmod 13 + 1 = 3$	

Il prodotto è quindi: $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 51.891.840$. La differenza tra la somma delle cifre di posto pari con quelle di posto dispari è: $18 - 18 = 0$.

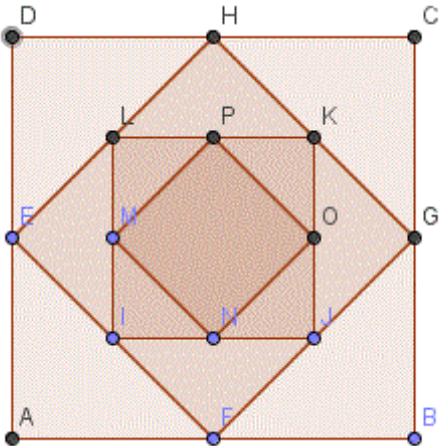
10. Sia Q un quadrato $ABCD$ di lato unitario; sia Q_1 il quadrato $EFGH$ ottenuto congiungendo i punti medi dei lati di Q ; sia Q_2 il quadrato $IJKL$ ottenuto congiungendo i punti medi dei lati di Q_1 ; e così via! Si costruisce quindi una successione di quadrati inscritti uno nell'altro. Calcolare la quarta potenza del rapporto tra le ragioni della successione dei perimetri con la successione delle aree dei quadrati.

Risposta: 4

SOLUZIONE

Dalla tabella seguente si ha:

QUADRATO	PERIMETRO	AREA
Q	4	1
Q_1	$2\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
Q_2	2	$\frac{1}{4}$



....		
------	------	------

La successione dei perimetri è: $\{4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \dots\}$, quindi si tratta di una progressione geometrica di ragione $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La successione delle aree è: $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$, quindi si tratta di una progressione geometrica di ragione $k = \frac{1}{2}$.

Il rapporto richiesto è: $R = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow R^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$.

11. Data la successione:
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 30 \\ x_{n+1} = 10x_n - 25x_{n-1} \end{cases}, \text{ calcolare } \frac{x_{1962}}{5^{1962}}.$$

Risposta: 9811

SOLUZIONE

Conviene scrivere il termine generico. Poiché $\alpha = 10$ e $\beta = -25$, l'equazione $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 = 0$ ha due soluzioni coincidenti $S_1 = S_2 = S = 5$. Quindi $x_r = a \cdot 5^r + b \cdot r \cdot 5^r$. Se $r = 0$ allora $a = 1$; se $r = 1$ allora $30 = 5a + 5b$ quindi $a = 1$ e $b = 5$. Segue che $x_r = (1 + 5r) \cdot 5^r$. Per trovare il risultato basta adesso sostituire $r = 1962$, ottenendo $x_{1962} = 9811 \cdot 5^{1962}$ e $\frac{x_{1962}}{5^{1962}} = 9811$.

CENNI SUL CONCETTO DI FUNZIONE

Dati due insiemi A e B , una funzione f è una relazione tra gli elementi dell'insieme A e gli elementi dell'insieme B tale che ad ogni elemento di A corrisponde uno ed un solo elemento di B .

Si potrebbe scrivere $f : a \rightarrow b$ (con $a \in A$ e $b \in B$) dove b prende il nome di **immagine** di a mediante la funzione f oppure si potrebbe scrivere $f : A \rightarrow B$ (dove in questo caso sono evidenziati i due insiemi e non gli elementi a e b). Gli insiemi A e B si dicono rispettivamente insieme di partenza e insieme di arrivo.

Quindi una funzione è un insieme di coppie di elementi, il primo scelto in A e il secondo scelto in B .

Es. Se $A = \{a; b; c\}$ e $B = \{1; 2; 3\}$, una funzione da A a B potrebbe essere definita dall'insieme di coppie: $(a; 1)$ $(b; 1)$ $(c; 2)$ ma non dall'insieme di coppie $(a; 1)$ $(b; 1)$ $(a; 2)$ $(c; 2)$ perché in questo caso all'elemento a corrispondono due elementi in B .

Più in generale, l'insieme A è chiamato **dominio** della funzione, il sottoinsieme di B che contiene tutte le immagini degli elementi di A è chiamato **codominio** della funzione.

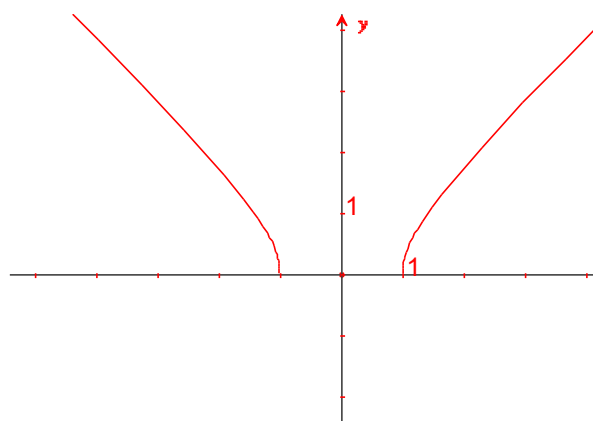
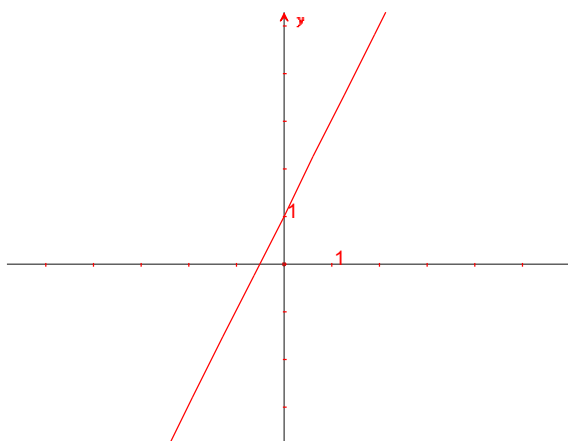
Se A e B sono sottoinsiemi (propri o impropri) di $\mathbb{R}$ (insieme di numeri reali) allora la funzione si dice *funzione reale di variabile reale*. In questo caso gli elementi dell'insieme A sono genericamente indicati con x e l'elemento che corrisponde a x in B si indica con $f(x)$ oppure con y . Si dice che x è la variabile indipendente, y la variabile dipendente; si scrive: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = f(x), x, y \in \mathbb{R}$.

Spesso, come negli esempi che seguono, una funzione è assegnata mediante un'espressione analitica, ossia mediante una formula matematica.

In un piano cartesiano xOy l'insieme dei punti P di coordinate $(x; f(x))$ si chiama **grafico** della funzione.

Esempio 1

Disegniamo i grafici delle due funzioni f e g seguenti: $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$



f ha per dominio $\mathbb{R}$ e per codominio $\mathbb{R}$

g ha per dominio l'insieme $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ e per codominio $\mathbb{R}^+$ (numeri reali maggiori o uguali a zero.)

Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **iniettiva** se a due elementi distinti del dominio corrispondono due elementi distinti nel codominio, cioè $\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Analogamente si può dire che una funzione è iniettiva se $\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Continua l'esempio 1

La funzione f sopra disegnata è iniettiva mentre la funzione g non lo è (notiamo dal grafico che esistono infinite coppie di elementi nel dominio che hanno la stessa immagine, come ad esempio 1 e -1 per i quali si ha $g(1)=g(-1)=0$).

Una funzione si dice **suriettiva** o **surgettiva** se il codominio coincide con il secondo insieme (cioè con B). Questo vuol dire che $f(A) = B$, cioè che l'immagine dell'insieme di partenza coincide con tutto l'insieme di arrivo.

Una funzione si dice **biiettiva** o **bigettiva** se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva. In questo caso si ha che ad ogni elemento di A corrisponde un solo elemento di B (perché è una funzione) ma anche che ogni elemento di B è immagine di un solo elemento di A .

Se una funzione è biiettiva si può definire la **funzione inversa** $f^{-1}: B \rightarrow A$.

Se tracciamo in uno stesso piano cartesiano il grafico di una funzione f e della sua inversa otteniamo che i due grafici si corrispondono in una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Continua l'esempio 1

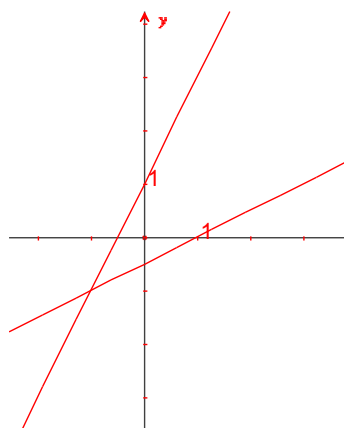
La funzione f dell'esempio è bigettiva e quindi è possibile definire la funzione inversa.

Come si trova la funzione inversa? Osserviamo che se in f esiste la coppia $(0;1)$ in f^{-1} ci sarà la coppia $(1;0)$, se in f esiste la coppia $(2;3)$ in f^{-1} ci sarà la coppia $(3;2)$.

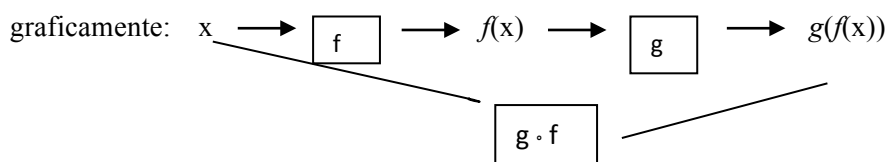
Per trovare l'espressione analitica di f^{-1} è necessario esplicitare la variabile x , cioè se sostituiamo y a $f(x)$, l'espressione di f diventa $y=2x+1$ ed esplicitando x si avrà $x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$.

A questo punto scambiando di x e y e chiamando y con $f^{-1}(x)$ si ottiene l'equazione $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Grafici di f e di f^{-1}



Date due funzioni f e g , si dice **funzione composta** di f e g , e si indica con il simbolo $g \circ f$ (che si legge: “ g composto f ”) la funzione definita da: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$;



Affinchè sia possibile calcolare $g(f(x))$, $f(x)$ deve appartenere al dominio di g .

Si osservi che la composizione si scrive nell'ordine inverso a quello di applicazione, cioè si scrive prima g poi f se si applica prima f poi g .

Allo stesso modo è possibile definire la funzione composta $f(g(x))$ (prima si applica la g poi la f) ma in generale l'operazione non è commutativa.

Continua l'esempio 1

Infatti, scrivendo le due funzioni composte relative agli esempi sopra considerati si ha:

$$g(f(x)) = g(2x+1) = \sqrt{(2x+1)^2 - 1}$$

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = 2\sqrt{x^2 - 1} + 1.$$

Proprietà:

- la composizione di funzioni iniettive è una funzione iniettiva
- la composizione di funzioni suriettive è una funzione suriettiva
- se $f(g(x))$ è una funzione suriettiva allora f è una funzione suriettiva
- se $f(g(x))$ è una funzione iniettiva allora g è una funzione iniettiva

Una funzione si dice **pari** se $f(-x) = f(x)$ mentre una funzione si **dice** dispari se $f(-x) = -f(x)$.

Il grafico di una funzione pari ha l'asse delle y come asse di simmetria (infatti, i punti del grafico di ascissa x e $-x$ hanno la stessa ordinata perché $f(-x) = f(x)$), mentre il grafico di una funzione dispari ha l'origine O degli assi come centro di simmetria (infatti, i punti del grafico di ascissa x e $-x$ hanno le ordinate opposte perché $f(-x) = -f(x)$)

Continua l'esempio 1

La funzione g dell'esempio è pari perché $g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = g(x)$.

Una funzione si dice **periodica** se esiste $T > 0$ tale che $f(x) = f(x + T)$ per ogni x .

Una funzione si dice:

- **strettamente crescente** se $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- **crescente in senso lato** se $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

- **strettamente decrescente** se $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- **decrescente in senso lato** se $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Una funzione strettamente crescente o strettamente decrescente si dice strettamente monotona.

Una funzione strettamente monotona è invertibile.

Una funzione biettiva o biunivoca è invertibile.

CENNI SULLE EQUAZIONI FUNZIONALI

Questo argomento generalmente viene trattato nelle gare individuali ma pensiamo sia comunque utile per apprendere delle tecniche di soluzione di quesiti che contengono funzioni.

Un'**equazione funzionale** è un'equazione che ha per incognita una funzione: si fornisce un'uguaglianza in cui compare una funzione incognita f e si chiede di determinare tutte le funzioni f che la verificano.

Esempio 2

Determinare tutte le funzioni f tali che $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Non esistono grandi teoremi o risultati cardine sulle equazioni funzionali, l'unica cosa da fare è provare

a fare manipolazioni algebriche e sostituzioni a partire dal testo dell'esercizio per arrivare a esplicitare la $f(x)$.

Suggerimenti

Potrebbe essere utile:

1. controllare se funzioni particolarmente semplici, come le costanti o le funzioni lineari, verificano l'equazione;
2. sostituire alle variabili x oppure y qualche numero (generalmente partendo da 0,1..);
3. scrivere una stessa cosa in più modi; per esempio se l'esercizio ci fornisce $f(a+b)$ in funzione di $f(a)$ e $f(b)$ si potrebbe tentare di scrivere $f(2)$ come $f(1+1)$ oppure $f(4)$ come $f(1+3)$ oppure $f(2+2)$;
4. fare dei cambi di variabile, cioè, ad esempio, sostituire $x+1$ con z e riscrivere l'equazione in funzione di z .

Vediamo qualche esempio in cui si sfruttano le tecniche sopra elencate.

Esempio 3

Risolvere l'equazione funzionale $f(x + y) = f(x) + f(y)$ con $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$.

Soluzione: Cerchiamo innanzitutto le soluzioni costanti: se $f(x) = k$, deve essere $k = k + k$

e quindi $k = 0$. La funzione costante $f(x)=0$ è soluzione.

Se invece proviamo a sostituire la generica funzione lineare $f(t) = at + b$, con a e b costanti da determinare, otteniamo: $a(x + y) + b = ax + b + ay + b$

che è identicamente verificata se e solo se $b = 0$ per qualunque valore di a .

Quindi tutte le funzioni del tipo $f(t) = at$ sono soluzioni dell'equazione.

Osservazione: queste soluzioni sono uniche se x, y appartengono a $\mathbb{Q}$ (numeri razionali), mentre nell'insieme di numeri reali non si può dire nulla (la dimostrazione è **complessa**). Questo tipo di equazione funzionale si chiama **equazione di Cauchy**.

Esempio 4

Risolvere l'equazione funzionale $f(xy) = (f(x) - 1)f(y) - x^2 + 1$.

Soluzione: si può cominciare cercando di sostituire qualche numero o alla x o alla y .

Proviamo ad esempio sostituendo $x = 0$ (così si annullano varie cose).

Si ottiene

$$f(0) = (f(0) - 1)f(y) + 1$$

che si può scrivere come

$$(f(0) - 1) - (f(0) - 1)f(y) = 0$$

quindi raccogliendo, si ottiene:

$$(f(0) - 1)(1 - f(y)) = 0$$

Dalla relazione sopra scritta si ottengono le due condizioni:

$$(f(0) - 1) = 0 \quad \text{oppure} \quad (1 - f(y)) = 0$$

La seconda condizione equivale a $f(y) = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, quindi la funzione cercata sarebbe una funzione costante e uguale a 1. E' possibile? E' **sempre necessario fare la verifica**, cioè sostituire nell'equazione iniziale e vedere se si ottiene un'identità.

Verifico:

$$1 = (1 - 1) \cdot 1 - x^2 + 1$$

e semplificando si ottiene:

$$x^2 = 0$$

Non abbiamo ottenuto un'identità (questa equazione è verificata solo per $x=0$) quindi la soluzione $f(x) = 1$ non è accettabile. Considero la seconda condizione, cioè $f(0) = 1$, e provo a fare una sostituzione opportuna (di nuovo cerco una sostituzione che annulli qualcosa nell'equazione).

Provo a sostituire $y = 0$ e ottengo

$$f(0) = (f(x) - 1)f(0) - x^2 + 1$$

e sostituendo $f(0) = 1$ si ottiene

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Potrebbe essere la soluzione?

Verifico sostituendo nell'equazione iniziale: si ottiene

$$x^2 y^2 + 1 = (x^2 + 1 - 1)(y^2 + 1) - x^2 + 1$$

$$x^2 y^2 + 1 = x^2 y^2 + 1$$

che è un'identità e quindi la funzione $f(x) = x^2 + 1$ è la soluzione cercata.

Esempio 5

Si determini l'equazione della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **suriettiva** tale che

$$f(x - f(y)) = 2f(x) + x + f(y)$$

Soluzione: vediamo come la condizione di suriettività permetta di trovare subito la soluzione. Infatti, in questo caso non conviene sostituire un numero alla x o alla y , ma sostituire direttamente a $f(y)$ (considerato che $f(y)$ può assumere un qualunque numero reale).

Ponendo $f(y) = 0$ si ottiene immediatamente $f(x) = 2f(x) + x$ e quindi $f(x) = -x$.

Verifichiamo che la funzione trovata risolve l'equazione:

$$f(x - f(y)) = f(x + y) = -x - y = 2(-x) + x - y = -x - y.$$

Dunque $-x - y = -x - y$.

Osservazioni: come abbiamo visto la risoluzione di equazioni funzionali è generalmente un esercizio complesso, ma l'importante è non farsi impaurire dal problema e cominciare a fare qualcosa di "semplice" (come sostituire o verificare con funzioni note.....)

ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1:

Data una funzione tale che $f(x+1) = \frac{2f(x)+1}{2}$ e tale che $f(2) = 2$, quanto vale $f(1)$?

Soluzione: sostituendo $x = 1$ si ottiene quindi $f(1) = \frac{2f(2)-1}{2} = \frac{3}{2}$

Esercizio 2

Sapendo che f è una funzione dispari, cioè tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x , quale delle seguenti è sicuramente una funzione dispari?

A) $f(x)-1$ B) $(f(x))^2$ C) $(f(x))^2+f(x)$ D) $(f(x))^3+1$ E) $(f(x))^3+f(x)$

Soluzione: E) Ricordando che una funzione è dispari se $f(-x)=-f(x)$, si verifica che solo la funzione E) è dispari perché, chiamando $g(x)=(f(x))^3+f(x)$ si ha $g(-x)=(f(-x))^3+f(-x)=-(f(x))^3-f(x)=-g(x)$ cioè g è dispari

Esercizio 3

Trova tutti i polinomi che verificano l'equazione $p(x+1)=p(x)+2x+1$

Soluzione: Il polinomio di grado zero non è soluzione. Infatti se fosse $p(x)=k$, sostituendo si avrebbe $k=k+2x+1$ che dipende da x e quindi non è un'identità

Si consideri ora il polinomio di grado 1, cioè la funzione lineare $p(x)=ax+b$, sostituendo nell'equazione si ottiene

$$a(x+1)+b=ax+b+2x+1$$

$$a=2x+1$$

che non è un'identità e quindi il polinomio di grado uno non è soluzione.

Si consideri il polinomio di grado due: $p(x)=ax^2+bx+c$ e sostituendo si ottiene:

$$a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+bx+c+2x+1$$

cioè semplificando

$2ax+a+b=2x+1$ che è un'identità solo se $a=1$ e $b=0$. Quindi i polinomi $p(x)=x^2+c$ sono soluzione dell'equazione.

Come possiamo verificare che è unica? Consideriamo la soluzione trovata precedentemente con $c=0$, cioè $p(x)=x^2$

Consideriamo la funzione polinomiale $f(x)=p(x)-x^2$ con $p(x)$ polinomio che verifica l'equazione funzionale sopra considerata. Allora si ottiene

$$f(x+1)=p(x+1)-(x+1)^2=p(x)+2x+1-x^2-2x-1=p(x)-x^2=f(x)$$

dalla quale si deduce che $f(x)$ è un polinomio costante cioè $f(x)=k$ e quindi $p(x)-x^2=k$, $p(x)=x^2+k$.

Quindi le uniche funzioni polinomiali che risolvono l'equazione polinomiale sono quelle di questo tipo (cioè quelle trovate nella prima parte della dimostrazione)

Esercizio 4

Trova le funzioni $f: R \rightarrow R$ che verificano l'equazioni funzionale:

$$f(x^2+y)+f(f(x)-y)=2f(f(x))+2y^2$$

Soluzione: sostituendo $y=0$ si ottiene

$$f(x^2) + f(f(x)) = 2f(f(x))$$

quindi

$$(*) \quad f(x^2) = f(f(x)).$$

Sostituendo quindi $y = f(x) - x^2$ si ottiene

$$f(x^2 + f(x) - x^2) + f(x^2) = 2f(f(x)) + 2(f(x) - x^2)^2$$

$$f(f(x)) + f(x^2) = 2f(f(x)) + 2(f(x) - x^2)^2$$

Ora sostituendo la (*) si ottiene

$$f(f(x)) + f(f(x)) = 2f(f(x)) + 2(f(x) - x^2)^2$$

Quindi semplificando si ha

$$2(f(x) - x^2)^2 = 0$$

Cioè

$$f(x) = x^2$$

che è la soluzione cercata (come si può controllare sostituendo) :

$$(x^2 + y)^2 + (x^2 - y)^2 = 2x^4 + 2y^2$$

$$2x^4 + 2y^2 = 2x^4 + 2y^2$$

Esercizio 5

Risolvere l'equazione funzionale $\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ (con $f: R_0 \rightarrow R$)

Soluzione: sostituendo x con $-\frac{1}{x}$ si ottiene

$$-xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x) = -\frac{1}{x}.$$

Osserviamo che se nella prima relazione moltiplichiamo per x si ottiene

$$f(-x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

A questo punto se sommiamo membro a membro le due equazioni si semplifica $xf\left(\frac{1}{x}\right)$ e si ottiene

$$2f(-x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$f(-x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x}$$

A questo punto sostituendo $-x$ con x si ottiene la soluzione cercata cioè

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x}.$$

Fare la verifica.....

Esercizio 6

Sia f una funzione reale di variabile reale che verifica le condizioni:

$$(*) \quad f(10+x) = f(10-x)$$

$$(**) \quad f(20+x) = -f(20-x)$$

per ogni valore di x .

Si dimostri che f è dispari e periodica.

Soluzione: Sfruttando le condizioni $(*)$ e $(**)$ si ottiene:

$$(***) \quad f(20+x) = f(10+(10+x)) = f(10-(10+x)) = f(-x)$$

Sostituendo $+x$ con $-x$ nella $(***)$ si ottiene

$$f(20-x) = f(x)$$

Ora applicando la $(***)$ e la $(**)$ si ottiene

$$f(-x) = f(20+x) = -f(20-x) = -f(x) \text{ con la quale risulta che } f \text{ è dispari (} f(-x) = -f(x) \text{).}$$

Per dimostrare che è periodica si osservi che

$$f(40+x) = f(20+(20+x)) = -f(20-(20+x)) = -f(-x) = f(x)$$

Quindi essendo $f(x+40) = f(x)$ si ottiene che f è periodica.

DISUGUAGLIANZE

Partendo dalla semplice disuguaglianza $x^2 \geq 0$ che vale per ogni numero reale x è possibile ottenere disuguaglianze più significative.

Ad esempio da $(a-b)^2 \geq 0$ cioè $a^2 + b^2 \geq 2ab$

considerati $a, b > 0$ dividendo per ab si ottiene

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

che può essere scritta

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (\text{dove l'uguaglianza vale se } x = 1).$$

Dalla disuguaglianza $a^2 + b^2 \geq 2ab$, sommando $a^2 + b^2$ da entrambe le parti si ottiene

$$2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab$$

$$2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$$

$$(a^2 + b^2) \geq \frac{(a+b)^2}{2} \text{ e dividendo per 2 entrambi i membri si ottiene}$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right) \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \text{ che estraendo la radice quadrata diventa}$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \text{ (media **quadratica** maggiore uguale alla media **aritmetica**)}$$

Sempre partendo da $a^2 + b^2 \geq 2ab$ e sostituendo a con $\sqrt{a}$ e b con $\sqrt{b}$ si ottiene

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \text{ (media **aritmetica** maggiore uguale alla media **geometrica**).$$

Esempio 1: dimostrare che $n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n$.

Dimostrazione: ad esempio dovrà essere $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \leq 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Sapendo che la media geometrica è minore uguale alla media aritmetica ottengo, prendendo il primo e l'ultimo numero di $n!$, che

$$\sqrt{1 \cdot n} \leq \frac{1+n}{2} \text{ cioè } 1 \cdot n \leq \left(\frac{1+n}{2} \right)^2$$

Analogamente, prendendo il secondo e il penultimo numero di $n!$,

$$\sqrt{2 \cdot (n-1)} \leq \frac{1+n}{2} \quad \text{cioè} \quad 2 \cdot (n-1) \leq \left(\frac{1+n}{2} \right)^2$$

e così via ottenendo $\frac{n}{2}$ disuguaglianze se n è pari o $\frac{n-1}{2}$ disuguaglianze se n è dispari.

Moltiplicando le disuguaglianze si ottiene la tesi cioè $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n$

(con i numeri dell'esempio si avrebbe

$$1 \cdot 5 \leq 3 \cdot 3$$

$$2 \cdot 4 \leq 3 \cdot 3$$

e ovviamente $3 = 3$.

Sommando le disuguaglianze si ha la tesi $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \leq 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$)

Disuguaglianza del riordinamento

Siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ due sequenze non decrescenti di numeri reali.

Indicata con σ una qualunque permutazione degli indici $1, \dots, n$ valgono le disuguaglianze

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

(ad esempio se $2 < 4 < 5 < 7$ e $-1 < 5 < 8 < 10$ si ha $20+32+25-7 \leq \dots \leq -2+20+40+70$ dove al posto dei puntini è possibile mettere la somma dei prodotti di ogni a_i con b_i dopo averli permutati).

Esempio 2: dimostrare che $\forall X, Y, Z \in R$ si ha $X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX$.

Dimostrazione: siano $a_1=X, a_2=Y, a_3=Z$ (supponiamo che siano ordinati dal più piccolo al più grande) e

$b_1=X, b_2=Y, b_3=Z$. Sapendo che

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

si ottiene che

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX$$

(considerato che $XY+YZ+ZX$ è la somma dei prodotti delle due terne ordinate non in ordine crescente).

Esempio 3: dimostrare che presi a, b, c , positivi e diversi, allora $a^b \cdot b^c \cdot c^a < a^a \cdot b^b \cdot c^c$

Dimostrazione: immaginiamo che risulti $a < b < c$; applichiamo un logaritmo con base maggiore di 1 ad entrambi i membri (ad esempio logaritmo naturale).

$$\log(a^b \cdot b^c \cdot c^a) < \log(a^a \cdot b^b \cdot c^c)$$

Applicando le proprietà dei logaritmi si ottiene:

$$\log a^b + \log b^c + \log c^a < \log a^a + \log b^b + \log c^c$$

$$b \cdot \log a + c \cdot \log b + a \cdot \log c < a \cdot \log a + b \cdot \log b + c \cdot \log c$$

Per la disuguaglianza di riordinamento la relazione sopra è vera perché se

$$a < b < c \quad \text{si avrà} \quad \log a < \log b < \log c$$

(il logaritmo con base maggiore di uno è una funzione crescente) e quindi la somma dei prodotti sarà massima se si considerano i prodotti mantenendo l'ordine dei numeri.

Disuguaglianza di Chebycheff

Considerate nuovamente $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ due sequenze non decrescenti di numeri reali, si ha che

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \leq n \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \geq n \left(\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \right)$$

(il segno di uguale vale solo se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ oppure $b_1 = b_2 = \dots = b_n$)

Osservazione: dividendo per n^2 entrambi i membri della disuguaglianza di Chebycheff si può definire la proprietà in questo modo:

se due n-uple di numeri reali sono ordinate nello stesso modo, allora il prodotto delle medie è minore uguale della media dei prodotti; se sono ordinate in modo inverso, vale la disuguaglianza opposta.

MEDIE CLASSICHE

Siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ n numeri reali *positivi*.

Si definiscono:

$$\text{media aritmetica} \quad AM = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\text{media geometrica} \quad GM = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

$$\text{media quadratica} \quad QM = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

$$\text{media cubica} \quad CM = \sqrt[n]{\frac{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3}{n}}$$

$$\text{media armonica} \quad HM = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Si ha che $\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq HM \leq GM \leq AM \leq QM \leq CM \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

MEDIE p-esime

Siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ n numeri reali *positivi*.

Dato $p \in \mathbb{R} - \{0\}$ si definisce **media p-esima** di $a_1, a_2, \dots, a_n$ la quantità

$$Media_p(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Osservazione:

se $p=1$ si ha la media aritmetica,

se $p=2$ si ha la media quadratica,

se $p=3$ si ha la media cubica,

se $p=-1$ si ha la media armonica.

Disuguaglianza tra medie generalizzate:

se $p < q$ si ha che $Media_p(a_1, \dots, a_n) \leq Media_q(a_1, \dots, a_n)$

Inoltre il segno uguale si ha se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.